Quadratische Funktionen

Mathematik · Klasse 9 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

Name: _____ Datum: _____

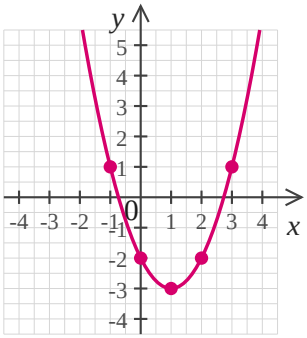
kostenlos, mit Lösungen

Der Graph einer quadratischen Funktion heißt Parabel. In der Scheitelform $f(x) = a \cdot (x - d)^2 + e$ liest du den Scheitelpunkt $S(d \mid e)$ direkt ab. Ist a positiv, ist die Parabel nach oben geöffnet, ist a negativ, nach unten. Ist a ohne Vorzeichen größer als 1, ist sie schmaler als die Normalparabel $y = x^2$, ist es kleiner als 1, breiter.

1 Zeichne die Parabel. Fang beim Scheitelpunkt an.

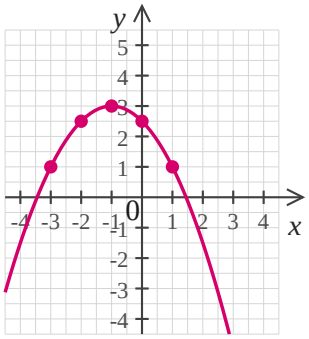
Vom Scheitelpunkt aus: 1 nach rechts und links, dann a nach oben (a negativ: nach unten). 2 nach rechts und links, dann 4 · a nach oben. Beispiel a = 3: 1 zur Seite und 3 nach oben, 2 zur Seite und 12 nach oben.

a) $f(x) = (x - 1)^2 - 3$



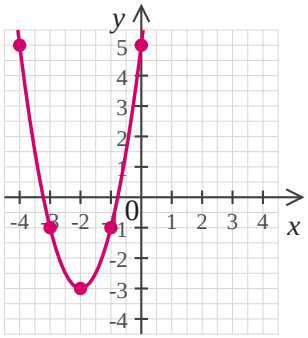
S(1 | -3), dazu (0 | -2), (2 | -2), (-1 | 1), (3 | 1)

b) $f(x) = -0{,}5 \cdot (x + 1)^2 + 3$



S(-1 | 3), dazu (-2 | 2,5), (0 | 2,5), (-3 | 1), (1 | 1)

c) $f(x) = 2 \cdot (x + 2)^2 - 3$



S(-2 | -3), dazu (-3 | -1), (-1 | -1), (-4 | 5), (0 | 5)

2 Gib die Gleichung der neuen Parabel in Scheitelform an.

Verschieben ändert d und e. Spiegeln an der x-Achse dreht die Vorzeichen außen um: Aus a wird -a und aus e wird -e. Strecken mit dem Faktor 3 heißt a = 3.

a) Die Normalparabel wird 3 nach links und 2 nach unten verschoben. *$f(x) = (x + 3)^2 - 2$*

b) Die Normalparabel wird an der x-Achse gespiegelt und dann 5 nach oben verschoben.
$f(x) = -x^2 + 5$

c) $f(x) = 2 \cdot (x + 1)^2$ wird 4 nach rechts und 3 nach unten verschoben. *$f(x) = 2 \cdot (x - 3)^2 - 3$*

d) $f(x) = (x - 2)^2 + 1$ wird an der x-Achse gespiegelt. *$f(x) = -(x - 2)^2 - 1$*

e) Die Normalparabel wird mit dem Faktor 3 gestreckt und 4 nach oben verschoben.
$f(x) = 3x^2 + 4$

Quadratische Funktionen (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 9 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

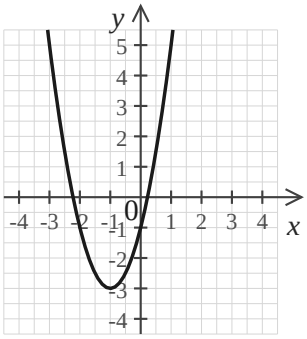
kostenlos, mit Lösungen

Name: _____ Datum: _____

3 Lies den Scheitelpunkt und den Faktor a ab. Gib die Gleichung an.

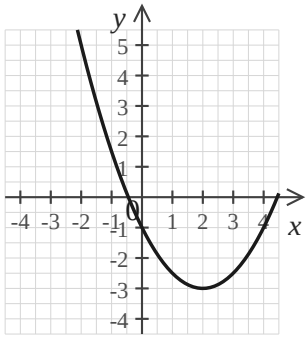
Geh vom Scheitelpunkt 1 nach rechts und zähl, wie weit es bis zur Parabel nach oben ist: Das ist a (nach unten: a negativ). Bei a = 0,5 geh lieber 2 nach rechts: Dann sind es 2 nach oben.

a)



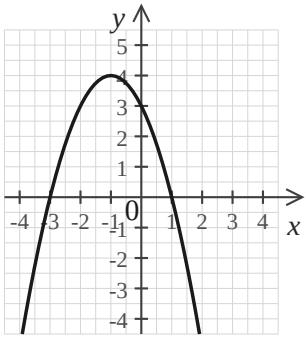
S(-1 | -3), a = 2: f(x) = 2 · (x + 1)² - 3

b)



S(2 | -3), a = 0,5: f(x) = 0,5 · (x - 2)² - 3

c)



S(-1 | 4), a = -1: f(x) = -(x + 1)² + 4

4 Der Punkt liegt auf der Parabel f(x) = (x - 1)² + 3. Berechne die fehlende Koordinate.

Fehlt y, setzt du x ein. Fehlt x, setzt du f(x) gleich dem y-Wert und ziehst die Wurzel. Dabei gibt es oft zwei Lösungen: Aus (x - 1)² = 9 folgt x - 1 = 3 oder x - 1 = -3.

a) P(4 | ?) *f(4) = 3² + 3 = 12, also P(4 | 12)*

b) R(? | 7)

(x - 1)² = 4, also x - 1 = 2 oder x - 1 = -2

R(3 | 7) oder R(-1 | 7)

c) U(? | 2)

(x - 1)² = -1 hat keine Lösung.

Den Punkt gibt es nicht: Der tiefste Punkt hat y = 3.

Quadratische Funktionen (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 9 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

kostenlos, mit Lösungen

Name: _____ Datum: _____

5 Bringe die Scheitelform in die Normalform $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Erst die Klammer mit der binomischen Formel auflösen, dann mit a malnehmen, zuletzt e dazurechnen. Beispiel: $2 \cdot (x - 1)^2 + 3 = 2 \cdot (x^2 - 2x + 1) + 3 = 2x^2 - 4x + 5$.

a) $f(x) = 2 \cdot (x - 3)^2 + 1$

$= 2 \cdot (x^2 - 6x + 9) + 1$

$= 2x^2 - 12x + 19$

b) $f(x) = -(x + 2)^2 + 5$

$= -(x^2 + 4x + 4) + 5$

$= -x^2 - 4x + 1$

c) $f(x) = 0{,}5 \cdot (x - 4)^2 - 3$

$= 0{,}5 \cdot (x^2 - 8x + 16) - 3$

$= 0{,}5x^2 - 4x + 5$

6 Bringe die Normalform in die Scheitelform und gib den Scheitelpunkt an.

Quadratische Ergänzung: Halbiere die Zahl vor x und quadriere sie. Diese Zahl addierst und subtrahierst du. Beispiel: $x^2 + 4x + 1 = (x^2 + 4x + 4) - 4 + 1 = (x + 2)^2 - 3$, also $S(-2 \mid -3)$.

a) $f(x) = x^2 + 6x + 5$

$= (x + 3)^2 - 9 + 5$

$= (x + 3)^2 - 4$, $S(-3 \mid -4)$

b) $f(x) = x^2 - 4x + 7$

$= (x - 2)^2 - 4 + 7$

$= (x - 2)^2 + 3$, $S(2 \mid 3)$

c) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

$= (x + 1)^2 - 1 - 3$

$= (x + 1)^2 - 4$, $S(-1 \mid -4)$

Quadratische Funktionen (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 9 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

kostenlos, mit Lösungen

Name: _____ Datum: _____

7 Die Parabel hat den Scheitelpunkt S und geht durch den Punkt P. Bestimme a und gib die Gleichung an.

Setze S in $f(x) = a \cdot (x - d)^2 + e$ ein. Dann setzt du die Koordinaten von P für x und f(x) ein und löst nach a auf.

a) S(1 | 2), P(3 | 10)

$10 = a \cdot (3 - 1)^2 + 2 \rightarrow a = 2$

$f(x) = 2 \cdot (x - 1)^2 + 2$

b) S(0 | 5), P(2 | 1)

$1 = a \cdot 2^2 + 5 \rightarrow a = -1$

$f(x) = -x^2 + 5$

c) S(3 | 4), P(1 | -8)

$-8 = a \cdot (-2)^2 + 4 \rightarrow a = -3$

$f(x) = -3 \cdot (x - 3)^2 + 4$

8 Berechne die Nullstellen. Setze f(x) = 0.

Stell nach der Klammer um und zieh die Wurzel. Denk an beide Vorzeichen: Aus $(x + 1)^2 = 16$ folgt $x + 1 = 4$ oder $x + 1 = -4$. Ist die Zahl rechts negativ, gibt es keine Nullstelle.

a) $f(x) = (x - 2)^2 - 9$

$(x - 2)^2 = 9$, also $x - 2 = 3$ oder $x - 2 = -3$

$x = 5$ oder $x = -1$

b) $f(x) = 2 \cdot (x - 3)^2 - 8$

$(x - 3)^2 = 4$

$x = 5$ oder $x = 1$

c) $f(x) = (x - 1)^2 + 3$

$(x - 1)^2 = -3$

keine Nullstelle, ein Quadrat ist nie negativ

Quadratische Funktionen (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 9 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

kostenlos, mit Lösungen

Name: _____ Datum: _____

9 Wie viele Nullstellen hat die Parabel? Entscheide ohne zu rechnen und begründe.

Schau auf den Scheitelpunkt und die Öffnung. Ist die Parabel nach oben geöffnet und liegt der Scheitelpunkt unter der x-Achse, schneidet sie die x-Achse zweimal.

a) $f(x) = 3 \cdot (x - 1)^2 + 2$ *keine: nach oben geöffnet, S(1 | 2) liegt über der x-Achse*

b) $f(x) = -(x + 3)^2 + 5$ *zwei: nach unten geöffnet, S(-3 | 5) liegt über der x-Achse*

c) $f(x) = 0{,}5 \cdot (x - 4)^2$ *eine: S(4 | 0) liegt auf der x-Achse*

d) $f(x) = -2x^2 - 1$ *keine: nach unten geöffnet, S(0 | -1) liegt unter der x-Achse*

10 Ein Rasensprenger spritzt Wasser in einem Bogen. Gemessen wurde die Höhe h des Strahls im Abstand x von der Düse.

Der Bogen ist eine Parabel. Gleich hohe Punkte liegen gleich weit links und rechts vom Scheitelpunkt.

x in m	0	1	2	3	4
h in m	1	1,6	1,8	1,6	1

a) Wo liegt der höchste Punkt des Strahls? Begründe mit der Tabelle.

h(1) = h(3) und h(0) = h(4): Der Bogen ist symmetrisch zu x = 2.

Höchster Punkt S(2 | 1,8)

b) Gib die Funktionsgleichung in Scheitelform an.

h(x) = a · (x - 2)² + 1,8, mit (0 | 1): 1 = 4a + 1,8

a = -0,2, also h(x) = -0,2 · (x - 2)² + 1,8

c) In welchem Abstand von der Düse trifft das Wasser auf den Boden?

0 = -0,2 · (x - 2)² + 1,8, also (x - 2)² = 9

x = 5 (x = -1 liegt hinter der Düse): nach 5 m