Wachstumsmodelle

Mathematik · Klasse 12 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

kostenlos, mit Lösungen

Name: _____ Datum: _____

1 Rechne zwischen q und k um.

$q^t = e^{k \cdot t}$, also $q = e^k$ und $k = \ln(q)$. t zählt in Jahren. Beispiel: 3 % Wachstum → q = 1,03 → k = ln(1,03) ≈ 0,0296.

a) $N(t) = 500 \cdot e^{0{,}0953t}$

$q = e^{0{,}0953} \approx 1{,}10$

Wachstum um 10 % pro Jahr

b) $N(t) = 800 \cdot 1{,}02^t$

$k = \ln(1{,}02) \approx 0{,}0198$

$N(t) = 800 \cdot e^{0{,}0198t}$

c) $N(t) = 200 \cdot e^{-0{,}2231t}$

$q = e^{-0{,}2231} \approx 0{,}80$

Abnahme um 20 % pro Jahr

d) $N(t) = 700 \cdot 0{,}90^t$

$k = \ln(0{,}90) \approx -0{,}1054$

$N(t) = 700 \cdot e^{-0{,}1054t}$

2 Bestimme k aus zwei Messwerten und dann die Verdopplungs- oder Halbwertszeit.

$N(t) = N0 \cdot e^{k \cdot t}$. Den zweiten Messwert einsetzen, durch N0 teilen, ln anwenden. Verdopplungszeit: ln(2) / k. Halbwertszeit: ln(2) / |k|.

a) Eine Bakterienkultur hat am Anfang 400 Bakterien, nach 4 Stunden sind es 1600.

$400 \cdot e^{4k} = 1600 \rightarrow e^{4k} = 4$

$k = \ln(4) / 4 \approx 0{,}347$

Verdopplungszeit: ln(2) / k = 2 Stunden

Wachstumsmodelle (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 12 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

kostenlos, mit Lösungen

Name: _____ Datum: _____

b) Von 800 g eines radioaktiven Stoffs sind nach 4 Tagen noch 200 g übrig.

$800 \cdot e^{4k} = 200 \rightarrow e^{4k} = \frac{1}{4}$

$k = \ln(\frac{1}{4}) / 4 \approx -0{,}347$

Halbwertszeit: $\ln(2) / |k| = 2$ Tage

c) Eine Bakterienkultur hat am Anfang 300 Bakterien, nach 15 Stunden sind es 2400.

$300 \cdot e^{15k} = 2400 \rightarrow e^{15k} = 8$

$k = \ln(8) / 15 \approx 0{,}139$

Verdopplungszeit: $\ln(2) / k = 5$ Stunden

3 Berechne, wann der Bestand den Wert erreicht.

Gleichung aufstellen, durch N0 teilen, dann ln auf beiden Seiten: $e^{k \cdot t} = m \rightarrow t = \ln(m) / k$.

a) $N(t) = 300 \cdot e^{0{,}05t}$, t in Jahren. Wann ist N = 1500?

$300 \cdot e^{0{,}05t} = 1500 \rightarrow e^{0{,}05t} = 5$

$0{,}05t = \ln(5) \rightarrow t = \ln(5) : 0{,}05 \approx 32{,}2$ Jahre

b) $N(t) = 200 \cdot e^{-0{,}25t}$, t in Stunden. Wann ist N = 100?

$200 \cdot e^{-0{,}25t} = 100 \rightarrow e^{-0{,}25t} = \frac{1}{2}$

$-0{,}25t = \ln(\frac{1}{2}) \rightarrow t = \ln(2) : 0{,}25 \approx 2{,}8$ Stunden

c) $N(t) = 300 \cdot e^{0{,}2t}$, t in Jahren. Wann ist N = 900?

$300 \cdot e^{0{,}2t} = 900 \rightarrow e^{0{,}2t} = 3$

$0{,}2t = \ln(3) \rightarrow t = \ln(3) : 0{,}2 \approx 5{,}5$ Jahre

Wachstumsmodelle (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 12 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

kostenlos, mit Lösungen

Name: _____ Datum: _____

4 Berechne die Temperatur.

Beschränktes Wachstum: Die Temperatur nähert sich der Raumtemperatur S. Der Abstand zu S nimmt exponentiell ab. Halbiert er sich alle T Minuten, bleibt nach n · T Minuten noch Abstand · $0{,}5^n$.

a) Eine Suppe hat 86 °C, der Raum 22 °C. Der Abstand zur Raumtemperatur halbiert sich alle 5 Minuten. Wie warm ist die Suppe nach 10 Minuten?

Schranke S = 22 °C, Abstand am Anfang 64 °C

10 Minuten sind 2 Halbierungen: 64 · $0{,}5^2$ = 16 °C

Temperatur: 22 + 16 = 38 °C

b) Ein Tee hat 92 °C, der Raum 20 °C. Der Abstand zur Raumtemperatur halbiert sich alle 4 Minuten. Wie warm ist der Tee nach 12 Minuten?

Schranke S = 20 °C, Abstand am Anfang 72 °C

12 Minuten sind 3 Halbierungen: 72 · $0{,}5^3$ = 9 °C

Temperatur: 20 + 9 = 29 °C

c) Eine Limo kommt mit 6 °C aus dem Kühlschrank. Im Raum sind es 22 °C. Der Abstand zur Raumtemperatur halbiert sich alle 5 Minuten. Wie warm ist die Limo nach 10 Minuten?

Schranke S = 22 °C, Abstand am Anfang 16 °C

10 Minuten sind 2 Halbierungen: 16 · $0{,}5^2$ = 4 °C

Temperatur: 22 - 4 = 18 °C