Skalarprodukt, Winkel und Abstand

Mathematik · Klasse 12 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

kostenlos, mit Lösungen

Name: _____ Datum: _____

1 Berechne den Winkel zwischen den Vektoren.

$\cos(\alpha) = (a \cdot b) / (|a| \cdot |b|)$. Den Winkel gibt der Rechner mit $\cos^{-1}$ im Modus DEG. Ist $a \cdot b$ negativ, ist der Winkel stumpf.

a) $a = (1 \mid -2 \mid -2)$, $b = (2 \mid -1 \mid 2)$

$a \cdot b = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 = 0$

$|a| = 3$, $|b| = 3$

$\cos(\alpha) = 0 / (3 \cdot 3) = 0$

$\alpha = 90°$

b) $a = (1 \mid -1 \mid 0)$, $b = (-2 \mid 4 \mid 4)$

$a \cdot b = 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 4 + 0 \cdot 4 = -6$

$|a| = \sqrt{2}$, $|b| = 6$

$\cos(\alpha) = -6 / (\sqrt{2} \cdot 6) \approx -0{,}707$

$\alpha = 135°$

c) $a = (1 \mid 0 \mid -1)$, $b = (-4 \mid 2 \mid 2)$

$a \cdot b = 1 \cdot (-4) + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 = -6$

$|a| = \sqrt{2}$, $|b| = \sqrt{24}$

$\cos(\alpha) = -6 / (\sqrt{2} \cdot \sqrt{24}) \approx -0{,}866$

$\alpha = 150°$

d) $a = (0 \mid 1 \mid 1)$, $b = (-2 \mid 1 \mid 2)$

$a \cdot b = 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3$

$|a| = \sqrt{2}$, $|b| = 3$

$\cos(\alpha) = 3 / (\sqrt{2} \cdot 3) \approx 0{,}707$

$\alpha = 45°$

Skalarprodukt, Winkel und Abstand (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 12 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

Name: _____ Datum: _____

kostenlos, mit Lösungen

2 Bestimme t so, dass die Vektoren senkrecht aufeinander stehen.

Rechne das Skalarprodukt mit t aus, setze es gleich 0 und löse nach t auf.

a) a = (t | -3 | -1), b = (-4 | 1 | 1)

a · b = t·(-4) + (-3)·1 + (-1)·1 = -4t - 4

-4t - 4 = 0 → -4t = 4 → t = -1

b) a = (-3 | t | -2), b = (1 | 1 | -3)

a · b = (-3)·1 + t·1 + (-2)·(-3) = t + 3

t + 3 = 0 → t = -3

c) a = (-6 | t | 3), b = (-2 | -2 | -2)

a · b = (-6)·(-2) + t·(-2) + 3·(-2) = -2t + 6

-2t + 6 = 0 → -2t = -6 → t = 3

3 Berechne den Innenwinkel des Dreiecks ABC bei A.

Der Winkel bei A liegt zwischen AB und AC. Also AB = B - A und AC = C - A bilden, dann weiter wie beim Winkel zwischen zwei Vektoren.

a) A(1 | 0 | 0), B(4 | 1 | 2), C(3 | 3 | -1)

AB = (3 | 1 | 2), AC = (2 | 3 | -1)

AB · AC = 3·2 + 1·3 + 2·(-1) = 7

|AB| = √14, |AC| = √14

cos(α) = 7 / (√14 · √14) = 0,5

α = 60°

b) A(1 | 0 | 2), B(0 | 2 | 0), C(-1 | 1 | 4)

AB = (-1 | 2 | -2), AC = (-2 | 1 | 2)

AB · AC = (-1)·(-2) + 2·1 + (-2)·2 = 0

|AB| = 3, |AC| = 3

cos(α) = 0 / (3 · 3) = 0

α = 90°

Skalarprodukt, Winkel und Abstand (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 12 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

Name: _____ Datum: _____

kostenlos, mit Lösungen

4 Berechne den Abstand des Punktes P von der Ebene E.

Abstand = |n · p - d| / |n| (Hessesche Normalform). n sind die Zahlen vor x1, x2, x3, d steht rechts vom Gleichheitszeichen.

a) P(-4 | 6 | -6), E: -3x1 + 6x2 - 2x3 = 53

|n| = √(9 + 36 + 4) = √49 = 7

n · p - d = (-3)·(-4) + 6·6 + (-2)·(-6) - 53 = 60 - 53 = 7

Abstand = |7| / 7 = 1 LE

b) P(-2 | 0 | 0), E: 2x1 - x2 - 2x3 = -10

|n| = √(4 + 1 + 4) = √9 = 3

n · p - d = 2·(-2) + (-1)·0 + (-2)·0 - (-10) = -4 - (-10) = 6

Abstand = |6| / 3 = 2 LE

c) P(-5 | -3 | -4), E: 2x1 + 9x2 - 6x3 = -46

|n| = √(4 + 81 + 36) = √121 = 11

n · p - d = 2·(-5) + 9·(-3) + (-6)·(-4) - (-46) = -13 - (-46) = 33

Abstand = |33| / 11 = 3 LE