Geraden und Ebenen im Raum

Mathematik · Klasse 12 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

kostenlos, mit Lösungen

Name: _____ Datum: _____

1 Stelle eine Gleichung der Ebene durch A, B und C in Parameterform auf.

Eine Ebene braucht einen Stützpunkt und zwei Spannvektoren, die keine Vielfachen voneinander sind: E: x = A + r · AB + s · AC. Prüf also erst, dass AC kein Vielfaches von AB ist.

a) A(0 | 3 | 4), B(1 | 5 | 5), C(3 | 1 | 7)

AB = B - A = (1 | 2 | 1), AC = C - A = (3 | -2 | 3)

AC ist kein Vielfaches von AB: A, B, C liegen nicht auf einer Geraden.

E: x = (0 | 3 | 4) + r · (1 | 2 | 1) + s · (3 | -2 | 3)

b) A(4 | 1 | 3), B(5 | 3 | 5), C(5 | -1 | 5)

AB = B - A = (1 | 2 | 2), AC = C - A = (1 | -2 | 2)

AC ist kein Vielfaches von AB: A, B, C liegen nicht auf einer Geraden.

E: x = (4 | 1 | 3) + r · (1 | 2 | 2) + s · (1 | -2 | 2)

c) A(-6 | -5 | -5), B(-4 | -2 | -3), C(-3 | -8 | -2)

AB = B - A = (2 | 3 | 2), AC = C - A = (3 | -3 | 3)

AC ist kein Vielfaches von AB: A, B, C liegen nicht auf einer Geraden.

E: x = (-6 | -5 | -5) + r · (2 | 3 | 2) + s · (3 | -3 | 3)

2 Die Ebene geht durch P und hat den Normalenvektor n. Gib sie in Koordinatenform an.

Die Zahlen von n stehen vor x1, x2 und x3: n1 · x1 + n2 · x2 + n3 · x3 = d. Die Zahl d bekommst du, wenn du P einsetzt: d = n · P.

a) n = (1 | -3 | 2), P(0 | -1 | -3)

d = n · P = 1 · 0 - 3 · (-1) + 2 · (-3) = -3

E: x1 - 3x2 + 2x3 = -3

b) n = (1 | -1 | 0), P(6 | 0 | -4)

d = n · P = 1 · 6 - 1 · 0 = 6

E: x1 - x2 = 6

Geraden und Ebenen im Raum (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 12 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

kostenlos, mit Lösungen

Name: _____ Datum: _____

c) n = (-2 | 2 | -3), P(-4 | -4 | -3)

d = n · P = -2 · (-4) + 2 · (-4) - 3 · (-3) = 9

E: -2x1 + 2x2 - 3x3 = 9

d) n = (2 | -2 | -3), P(-2 | -4 | -2)

d = n · P = 2 · (-2) - 2 · (-4) - 3 · (-2) = 10

E: 2x1 - 2x2 - 3x3 = 10

3 Entscheide: Sind g und h echt parallel oder identisch?

Ist w ein Vielfaches von u, sind g und h parallel. Dann die Punktprobe mit dem Stützpunkt von h auf g: Liegt er drauf, sind g und h identisch.

a) g: x = (4 | 5 | 0) + t · (1 | -1 | 2), h: x = (2 | 7 | -4) + s · (2 | -2 | 4)

w = 2 · u: g und h sind parallel.

Punktprobe mit Q(2 | 7 | -4) auf g: t = -2, t = -2, t = -2

Q liegt auf g: g und h sind identisch.

b) g: x = (-3 | -1 | 1) + t · (1 | -2 | -2), h: x = (-2 | -3 | -3) + s · (-2 | 4 | 4)

w = -2 · u: g und h sind parallel.

Punktprobe mit Q(-2 | -3 | -3) auf g: t = 1, t = 1, t = 2

Q liegt nicht auf g: g und h sind echt parallel.

c) g: x = (-3 | 1 | -5) + t · (1 | 2 | 2), h: x = (-2 | 3 | -3) + s · (2 | 4 | 4)

w = 2 · u: g und h sind parallel.

Punktprobe mit Q(-2 | 3 | -3) auf g: t = 1, t = 1, t = 1

Q liegt auf g: g und h sind identisch.

d) g: x = (5 | -4 | -5) + t · (3 | -1 | 0), h: x = (11 | -5 | -5) + s · (6 | -2 | 0)

w = 2 · u: g und h sind parallel.

Punktprobe mit Q(11 | -5 | -5) auf g: t = 2, t = 1, III passt immer

Q liegt nicht auf g: g und h sind echt parallel.

4 Ergänze die fehlende Koordinate.

C soll auf der Geraden durch A und B liegen: AC = t · AB. Bestimme t aus der x-Koordinate.

a) A(2 | 1 | 0), B(0 | 3 | 1), C(-2 | 5 | ?)

AB = (-2 | 2 | 1)

aus x: t = (-2 - 2) : (-2) = 2

z = 0 + 2 · 1 = 2

b) A(0 | 2 | 0), B(-1 | 3 | 1), C(-3 | 5 | ?)

AB = (-1 | 1 | 1)

aus x: t = (-3 - 0) : (-1) = 3

z = 0 + 3 · 1 = 3

c) A(3 | 0 | 0), B(2 | 2 | 1), C(4 | ? | -1)

AB = (-1 | 2 | 1)

aus x: t = (4 - 3) : (-1) = -1

y = 0 + (-1) · 2 = -2

d) A(1 | 0 | 1), B(0 | 1 | 2), C(3 | ? | -1)

AB = (-1 | 1 | 1)

aus x: t = (3 - 1) : (-1) = -2

y = 0 + (-2) · 1 = -2

Geraden und Ebenen im Raum (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 12 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

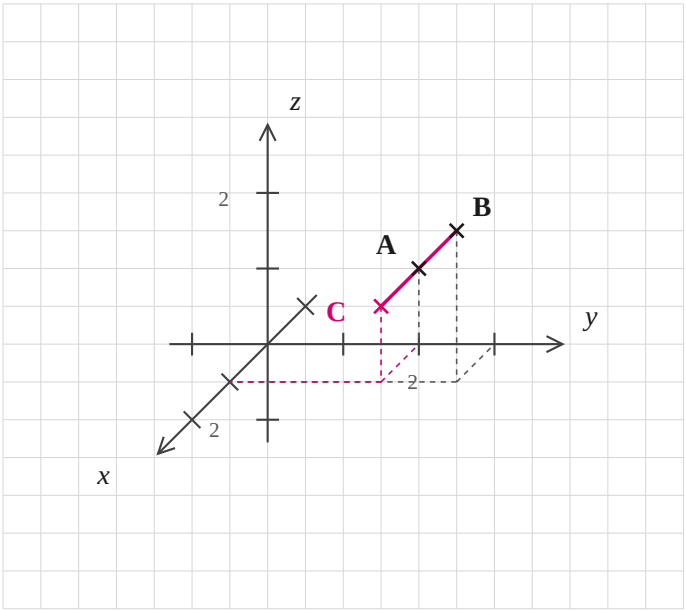
Name: _____ Datum: _____

kostenlos, mit Lösungen

5 Finde einen Punkt, der im Schrägbild täuscht.

Denk an die Richtung, die im Schrägbild auf einen Punkt fällt.

a) A(0 | 2 | 1) und B(1 | 3 | 2) sind eingezeichnet. Gib einen Punkt C an, der im Bild auf der Linie AB liegt, im Raum aber nicht auf der Geraden AB. Zeichne ihn ein und prüfe mit Vektoren.



Zum Beispiel C = A - AB + (2 | 1 | 1),

also C(1 | 2 | 1).

(2 | 1 | 1) fällt im Bild auf einen Punkt.

AB = (1 | 1 | 1), AC = (1 | 0 | 0)

aus x: Faktor 1, aber in y: 1 · 1 = 1 ≠ 0

also nein