Bestimmtes Integral und Flächen

Mathematik · Klasse 12 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

Name: _____ Datum: _____

kostenlos, mit Lösungen

1 Berechne den Inhalt der Fläche, die der Graph mit der x-Achse einschließt.

Die Nullstellen sind die Grenzen. Liegt die Fläche unter der x-Achse, ist das Integral negativ, und der Betrag ist die Fläche.

a) $f(x) = 3x^2 - 6x$

Nullstellen: $3x^2 - 6x = 0 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow x = 0$ und $x = 2$

$F(x) = x^3 - 3x^2$

$F(2) - F(0) = -4 - 0 = -4$

Das Integral ist negativ, die Fläche liegt unter der x-Achse: $A = 4$ FE

b) $f(x) = 3x^2 - 12x$

Nullstellen: $3x^2 - 12x = 0 \rightarrow x^2 - 4x = 0 \rightarrow x = 0$ und $x = 4$

$F(x) = x^3 - 6x^2$

$F(4) - F(0) = -32 - 0 = -32$

Das Integral ist negativ, die Fläche liegt unter der x-Achse: $A = 32$ FE

2 Berechne das Integral und den Flächeninhalt.

Wechselt f im Intervall das Vorzeichen, rechnest du die Fläche stückweise von Nullstelle zu Nullstelle und addierst die Beträge. Das Integral rechnest du in einem Stück.

a) $f(x) = 3x^2 - 3$ auf $[0; 3]$

Nullstelle im Intervall: $3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = 1$ ($x = -1$ liegt nicht im Intervall)

$F(x) = x^3 - 3x$: $F(0) = 0$, $F(1) = -2$, $F(3) = 18$

Integral: $F(3) - F(0) = 18$

Fläche: $|F(1) - F(0)| + |F(3) - F(1)| = 2 + 20 = 22$ FE

b) $f(x) = 2x - 6$ auf $[0; 6]$

Nullstelle im Intervall: $2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3$

$F(x) = x^2 - 6x$: $F(0) = 0$, $F(3) = -9$, $F(6) = 0$

Integral: $F(6) - F(0) = 0$

Fläche: $|F(3) - F(0)| + |F(6) - F(3)| = 9 + 9 = 18$ FE

Bestimmtes Integral und Flächen (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 12 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

kostenlos, mit Lösungen

Name: _____ Datum: _____

3 Berechne den Inhalt der Fläche, die die beiden Graphen einschließen.

Die Schnittstellen sind die Grenzen. Dann obere minus untere Funktion integrieren. Welche oben liegt, zeigt ein Test mit einer Zahl dazwischen.

a) $f(x) = 12x - 9$, $g(x) = 3x^2$

Schnittstellen: $3x^2 = 12x - 9 \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x = 1$ und $x = 3$

Oben liegt f (Test mit $x = 2$: $f(2) = 15 > g(2) = 12$)

Integral von 1 bis 3 über $(-3x^2 + 12x - 9)\,dx = [-x^3 + 6x^2 - 9x]$ von 1 bis 3 $= 0 - (-4) = 4$

A = 4 FE

b) $f(x) = -6x$, $g(x) = 3x^2$

Schnittstellen: $3x^2 = -6x \rightarrow x^2 + 2x = 0 \rightarrow x = -2$ und $x = 0$

Oben liegt f (Test mit $x = -1$: $f(-1) = 6 > g(-1) = 3$)

Integral von -2 bis 0 über $(-3x^2 - 6x)\,dx = [-x^3 - 3x^2]$ von -2 bis 0 $= 0 - (-4) = 4$

A = 4 FE

4 Bestimme die obere Grenze b > 0.

Rechne das Integral mit b statt einer Zahl aus. Dann die Gleichung nach b auflösen.

a) Integral von 0 bis b über $9x^2\,dx = 81$

$F(x) = 3x^3$, also $F(b) - F(0) = 3b^3$

$3b^3 = 81 \rightarrow b^3 = 27$

$b = 3$

b) Integral von 0 bis b über $6x\,dx = 27$

$F(x) = 3x^2$, also $F(b) - F(0) = 3b^2$

$3b^2 = 27 \rightarrow b^2 = 9$

$b = 3$ ($b = -3$ fällt weg, weil $b > 0$)

Bestimmtes Integral und Flächen (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 12 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

kostenlos, mit Lösungen

Name: _____ Datum: _____

5 Berechne die Gesamtänderung.

Die Gesamtänderung ist das Integral der Änderungsrate: Integral von 0 bis T über r(t) dt. Bei Zeiten schreibt man dt statt dx.

a) Wasser fließt mit r(t) = 24t - 6t² (in m³ pro Stunde) in ein Becken. Wie viel Wasser fließt in den ersten 4 Stunden hinein?

Gesamt = Integral von 0 bis 4 über (24t - 6t²) dt

Stammfunktion: 12t² - 2t³

F(4) - F(0) = 192 - 128 - 0 = 64

64 m³ fließen hinein.

b) In den 30 Minuten nach der Öffnung strömen Fans mit r(t) = 150 - 5t (Personen pro Minute) ins Stadion. Wie viele kommen in dieser Zeit?

Gesamt = Integral von 0 bis 30 über (150 - 5t) dt

Stammfunktion: $150t - \frac{5}{2}t^2$

F(30) - F(0) = 4500 - 2250 - 0 = 2250

2250 Fans kommen in den 30 Minuten.