Abi-Training: Stochastik

Mathematik · Klasse 12 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

kostenlos, mit Lösungen

Name: _____ Datum: _____

1 Berechne die Wahrscheinlichkeit.

Schreib zuerst das Modell auf: Was zählt X, mit welchem n und p? Dann übersetze in X: „höchstens 1“ heißt $X \leq 1$, also $P(X = 0) + P(X = 1)$. „Mindestens 2“ ist das Gegenteil davon: $1 - P(X = 0) - P(X = 1)$. Runde auf drei Nachkommastellen.

a) Zeynep trifft beim Torwandschießen mit 30 % Wahrscheinlichkeit. Sie schießt 10-mal. Wie wahrscheinlich trifft sie mindestens zweimal?

X = Anzahl der Treffer, binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}3$

$P(X = 0) = 0{,}7^{10} \approx 0{,}028$

$P(X = 1) = 10 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^{9} \approx 10 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}04035 \approx 0{,}121$

$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \approx 1 - 0{,}028 - 0{,}121 = 0{,}851$

b) Bei einem Paketdienst kommen 10 % der Pakete zu spät. Lena bekommt 10 Pakete. Wie wahrscheinlich kommen höchstens zwei zu spät?

X = Anzahl der verspäteten Pakete, binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}1$

$P(X = 0) = 0{,}9^{10} \approx 0{,}349$

$P(X = 1) = 10 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^{9} \approx 10 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}38742 \approx 0{,}387$

$P(X = 2) = 45 \cdot 0{,}1^{2} \cdot 0{,}9^{8} \approx 45 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}43047 \approx 0{,}194$

$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \approx 0{,}349 + 0{,}387 + 0{,}194 = 0{,}930$

c) Ein Test hat 8 Fragen mit je vier Antworten, eine davon ist richtig. Emre rät bei jeder Frage. Wie wahrscheinlich hat er höchstens eine richtig?

X = Anzahl der richtigen Antworten, binomialverteilt mit $n = 8$ und $p = 0{,}25$

$P(X = 0) = 0{,}75^{8} \approx 0{,}100$

$P(X = 1) = 8 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75^{7} \approx 8 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}13348 \approx 0{,}267$

$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) \approx 0{,}100 + 0{,}267 = 0{,}367$

Abi-Training: Stochastik (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 12 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

Name: _____ Datum: _____

kostenlos, mit Lösungen

2 Liegt das Ergebnis in der 1σ-Umgebung, nur in der 2σ-Umgebung oder außerhalb? Ordne es ein.

$E(X) = n \cdot p$ und $\sigma = \sqrt{(n \cdot p \cdot (1 - p))}$. Die σ-Regeln gelten, wenn $\sigma > 3$ ist. In der 1σ-Umgebung $E \pm \sigma$ liegen etwa 68 % der Ergebnisse, in der 2σ-Umgebung $E \pm 2\sigma$ etwa 95 %.

a) 10 % der Teile einer Maschine sind fehlerhaft. In einer Stichprobe von 900 Teilen sind 68 fehlerhaft.

$E(X) = 900 \cdot 0{,}1 = 90$, $\sigma = \sqrt{(900 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9)} = \sqrt{81} = 9$

Laplace-Bedingung: $\sigma = 9 > 3$ (stimmt), die σ-Regeln gelten.

1σ-Umgebung [81; 99], 2σ-Umgebung [72; 108]

68 liegt außerhalb der 2σ-Umgebung. Das passiert nur in etwa 5 % der Fälle: Das Ergebnis ist auffällig.

b) Eine Münze wird 100-mal geworfen, 41-mal fällt Kopf.

$E(X) = 100 \cdot 0{,}5 = 50$, $\sigma = \sqrt{(100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5)} = \sqrt{25} = 5$

Laplace-Bedingung: $\sigma = 5 > 3$ (stimmt), die σ-Regeln gelten.

1σ-Umgebung [45; 55], 2σ-Umgebung [40; 60]

41 liegt nicht in der 1σ-, aber in der 2σ-Umgebung. In der 2σ-Umgebung liegen etwa 95 % der Ergebnisse, das Ergebnis ist also noch unauffällig.

c) Von einer Sorte Samen keimen 80 %. Frau Demir sät 225 Samen, 179 davon keimen.

$E(X) = 225 \cdot 0{,}8 = 180$, $\sigma = \sqrt{(225 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2)} = \sqrt{36} = 6$

Laplace-Bedingung: $\sigma = 6 > 3$ (stimmt), die σ-Regeln gelten.

1σ-Umgebung [174; 186], 2σ-Umgebung [168; 192]

179 liegt in der 1σ-Umgebung: ein ganz gewöhnliches Ergebnis. Dort liegen etwa 68 % aller Ergebnisse.

Abi-Training: Stochastik (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 12 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

Name: _____ Datum: _____

kostenlos, mit Lösungen

3 Rechne mit 1000 Fällen und beantworte die Frage.

Stell dir 1000 Fälle vor und verteile sie wie in einer Vierfeldertafel. Dann: gesuchte Fälle durch alle Fälle mit der Bedingung.

a) Eine Krankheit haben 4 % der Menschen. Ein Test erkennt 95 % der Kranken. Bei 10 % der Gesunden schlägt er aber auch an. Wie wahrscheinlich ist eine Person mit positivem Test wirklich krank?

Stell dir 1000 Personen vor: 40 krank, 960 gesund.

Positiv sind 38 Kranke (95 % von 40) und 96 Gesunde (10 % von 960), zusammen 134.

P(krank | positiv) = $\frac{38}{134} = \frac{19}{67} \approx 0{,}284$

Nur etwa 28 % der positiv Getesteten sind wirklich krank. Es gibt viel mehr Gesunde, deshalb fallen die Fehlalarme ins Gewicht.

b) 30 % aller E-Mails sind Spam. Ein Filter erkennt 90 % der Spam-Mails, markiert aber auch 5 % der normalen Mails als Spam. Wie wahrscheinlich ist eine markierte Mail wirklich Spam?

Stell dir 1000 Mails vor: 300 Spam, 700 normale.

Markiert werden 270 Spam-Mails (90 % von 300) und 35 normale (5 % von 700), zusammen 305.

P(Spam | markiert) = $\frac{270}{305} = \frac{54}{61} \approx 0{,}885$

Eine markierte Mail ist zu etwa 89 % wirklich Spam.

4 Berechne die bedingten Wahrscheinlichkeiten.

Übersetze die Frage zuerst: „Wie wahrscheinlich ist eine geimpfte Person erkrankt?“ heißt P(erkrankt | geimpft). Hinter dem Strich steht die Bedingung, durch deren Anzahl du teilst.

a) Von 400 Befragten wohnen 240 in der Stadt, 120 von ihnen haben ein Auto. Von den 160 anderen haben 96 ein Auto. Wie wahrscheinlich hat eine Person aus der Stadt ein Auto? Wie wahrscheinlich wohnt eine Person mit Auto in der Stadt?

Mit Auto insgesamt: 120 + 96 = 216

P(Auto | Stadt) = $\frac{120}{240} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ (Bedingung „Stadt“: durch alle 240 aus der Stadt)

P(Stadt | Auto) = $\frac{120}{216} = \frac{5}{9} \approx 0{,}556$ (Bedingung „Auto“: durch alle 216 mit Auto)

b) Von 500 Personen sind 400 geimpft, von ihnen erkranken 20. Von den 100 Ungeimpften erkranken 20. Wie wahrscheinlich erkrankt eine geimpfte Person? Wie wahrscheinlich ist eine erkrankte Person geimpft?

Erkrankt insgesamt: 20 + 20 = 40

P(erkrankt | geimpft) = $\frac{20}{400} = \frac{1}{20}$ = 0,05 (Bedingung „geimpft“: durch alle 400 Geimpften)

P(geimpft | erkrankt) = $\frac{20}{40} = \frac{1}{2}$ = 0,5 (Bedingung „erkrankt“: durch alle 40 Erkrankten)

5 Ist das Spiel fair? Begründe mit dem Erwartungswert.

Erwartungswert = Summe aus Wert mal Wahrscheinlichkeit. Fair heißt: Der erwartete Gewinn (Auszahlung minus Einsatz) ist 0.

a) Du wirfst zwei Würfel. Bei zwei Sechsen bekommst du 26 €, bei genau einer Sechs 1 €, sonst nichts. Der Einsatz ist 1 €.

P(zwei Sechsen) = $\frac{1}{36}$, P(genau eine Sechs) = $\frac{5}{36} + \frac{5}{36} = \frac{10}{36}$, P(keine Sechs) = $\frac{25}{36}$

E(Auszahlung) = $26 \cdot \frac{1}{36} + 1 \cdot \frac{10}{36} + 0 \cdot \frac{25}{36} = \frac{36}{36}$ = 1 €

E(Gewinn) = E(Auszahlung) - Einsatz = 0 €

Der erwartete Gewinn ist 0: Das Spiel ist fair.

b) In einer Urne liegen 2 rote, 3 blaue und 5 weiße Kugeln. Du ziehst eine Kugel. Rot bringt 5 €, Blau 2 €, Weiß nichts. Der Einsatz ist 1,50 €.

P(rot) = $\frac{2}{10}$, P(blau) = $\frac{3}{10}$, P(weiß) = $\frac{5}{10}$

E(Auszahlung) = $5 \cdot \frac{2}{10} + 2 \cdot \frac{3}{10} + 0 \cdot \frac{5}{10}$ = 1,60 €

E(Gewinn) = E(Auszahlung) - Einsatz = 0,10 €

Im Mittel gewinnst du 0,10 € pro Spiel: Das Spiel ist nicht fair, es ist günstig für dich.