Abi-Training: hilfsmittelfreier Teil

Mathematik · Klasse 12 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

kostenlos, mit Lösungen

Name: _____ Datum: _____

Hilfsmittelfreier Teil: ohne Taschenrechner und ohne Formelsammlung. Die Zahlen gehen glatt auf. Wird es krumm, such den Rechenfehler. Eine Gleichung darf aber auch keine Lösung haben.

1 Bestimme die Gleichung der Tangente an der Stelle x0.

Tangente: t(x) = f'(x0) · (x - x0) + f(x0). Erst den Punkt f(x0), dann die Steigung f'(x0), dann einsetzen und vereinfachen.

a) $f(x) = 2x^2 + 4x + 1$, $x_0 = -2$

f(-2) = 8 - 8 + 1 = 1

f'(x) = 4x + 4, m = f'(-2) = -4

t(x) = -4 · (x + 2) + 1 = -4x - 7

b) $f(x) = x^2 - 4x$, $x_0 = -1$

f(-1) = 1 + 4 = 5

f'(x) = 2x - 4, m = f'(-1) = -6

t(x) = -6 · (x + 1) + 5 = -6x - 1

c) $f(x) = x^2 - 3x - 5$, $x_0 = 3$

f(3) = 9 - 9 - 5 = -5

f'(x) = 2x - 3, m = f'(3) = 3

t(x) = 3 · (x - 3) - 5 = 3x - 14

2 Löse die Gleichung.

Erst den schnellsten Weg suchen: kein Zahlglied → x ausklammern, kein x-Glied → Wurzel ziehen, sonst pq-Formel $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$. Vorher durch die Zahl vor x^2 teilen. $e^{\cdots}$ ist nie 0.

a) $-x^2 + 2x + 8 = 0$

Durch (-1) teilen: $x^2 - 2x - 8 = 0$

pq-Formel mit p = -2, q = -8: $x = 1 \pm \sqrt{(1 + 8)} = 1 \pm \sqrt{9} = 1 \pm 3$

x1 = -2, x2 = 4

b) $x^2 + 4x + 6 = 0$

$p = 4$, $q = 6$: $(\frac{p}{2})^2 - q = 4 - 6 = -2 < 0$

Unter der Wurzel steht eine negative Zahl: Die Gleichung hat keine Lösung.

c) $(x^2 - 4) \cdot e^x = 0$

e^x ist nie 0. Also muss die Klammer 0 sein: $x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 4 \rightarrow x = -2$ oder $x = 2$

d) $3x^2 + 12x = 0$

Kein Zahlglied, also x ausklammern: $x \cdot (3x + 12) = 0$

Ein Produkt ist 0, wenn ein Faktor 0 ist: $x = 0$ oder $3x + 12 = 0 \rightarrow x = -4$

e) $4x^2 - 100 = 0$

Kein x-Glied, also nach x^2 auflösen: $x^2 = 25$

Wurzel ziehen, beide Vorzeichen: $x = -5$ oder $x = 5$

3 Bestimme die Extrempunkte.

Notwendig: $f'(x) = 0$, erst durch die Zahl vor x^2 teilen. Hinreichend: $f'' < 0$ heißt Hochpunkt, $f'' > 0$ Tiefpunkt. y-Werte mit f.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$

Notwendig: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x = 1$ oder $x = 3$

Hinreichend: $f''(x) = 6x - 12$, $f''(1) = -6 < 0 \rightarrow$ Hochpunkt, $f''(3) = 6 > 0 \rightarrow$ Tiefpunkt

$f(1) = 7$, $f(3) = 3 \rightarrow H(1|7)$, $T(3|3)$

b) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 1$

Notwendig: $f'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = -1$ oder $x = 3$

Hinreichend: $f''(x) = -6x + 6$, $f''(-1) = 12 > 0 \rightarrow$ Tiefpunkt, $f''(3) = -12 < 0 \rightarrow$ Hochpunkt

$f(-1) = -6$, $f(3) = 26 \rightarrow T(-1|-6)$, $H(3|26)$

Abi-Training: hilfsmittelfreier Teil (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 12 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

Name: _____ Datum: _____

kostenlos, mit Lösungen

c) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$

Notwendig: $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow x = -3$ oder $x = 1$

Hinreichend: $f''(x) = 6x + 6$, $f''(-3) = -12 < 0 \rightarrow$ Hochpunkt, $f''(1) = 12 > 0 \rightarrow$ Tiefpunkt

$f(-3) = 28$, $f(1) = -4 \rightarrow H(-3|28)$, $T(1|-4)$

4 Prüfe, ob das Dreieck ABC bei B einen rechten Winkel hat.

Rechter Winkel bei B heißt: Die Vektoren BA und BC stehen senkrecht, ihr Skalarprodukt ist 0.

a) A(0|-5|-1), B(0|-3|0), C(-2|-2|-2)

$BA = A - B = (0|-2|-1)$, $BC = C - B = (-2|1|-2)$

$BA \cdot BC = 0 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) = 0 - 2 + 2 = 0 \rightarrow$ BA und BC stehen senkrecht: rechter Winkel bei B.

b) A(0|0|0), B(-1|0|-2), C(-4|3|-1)

$BA = A - B = (1|0|2)$, $BC = C - B = (-3|3|1)$

$BA \cdot BC = 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = -3 + 0 + 2 = -1 \neq 0 \rightarrow$ kein rechter Winkel bei B.

5 Berechne die Wahrscheinlichkeit mit der Bernoulli-Formel.

$P(X = k) = (n \text{ über } k) \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$. (n über k) ohne Rechner: oben k Faktoren von n abwärts, unten k Faktoren von k abwärts, zum Beispiel (4 über 2) = (4 · 3) : (2 · 1) = 6. Mit Brüchen rechnen und am Ende kürzen.

a) $n = 3$, $p = \frac{1}{2}$: $P(X = 1)$

$(3 \text{ über } 1) = 3$, $P(X = 1) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2})^2 = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

b) $n = 3$, $p = \frac{1}{4}$: $P(X = 2)$

$(3 \text{ über } 2) = 3$, $P(X = 2) = 3 \cdot (\frac{1}{4})^2 \cdot \frac{3}{4} = 3 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$

c) $n = 4$, $p = \frac{1}{3}$: $P(X = 2)$

$(4 \text{ über } 2) = 6$, $P(X = 2) = 6 \cdot (\frac{1}{3})^2 \cdot (\frac{2}{3})^2 = 6 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{24}{81} = \frac{8}{27}$