Abi-Training: Analytische Geometrie

Mathematik · Klasse 12 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

kostenlos, mit Lösungen

Name: _____ Datum: _____

1 Stelle eine Gleichung der Ebene durch A, B und C in Koordinatenform auf.

Zwei Spannvektoren AB und AC bilden. Der Normalenvektor steht auf beiden senkrecht: n = AB × AC (oder aus n · AB = 0 und n · AC = 0). Dann d = n · A.

a) A(1|-3|-1), B(3|-4|1), C(2|-2|-2)

Spannvektoren: AB = (2|-1|2), AC = (1|1|-1)

n = AB × AC = (1 - 2 | 2 - (-2) | 2 - (-1)) = (-1|4|3)

d = n · A = (-1) · 1 + 4 · (-3) + 3 · (-1) = -1 - 12 - 3 = -16

E: -x1 + 4x2 + 3x3 = -16 (Probe: B ergibt -16, C ergibt -16 (stimmt))

b) A(0|3|1), B(1|4|0), C(-1|5|3)

Spannvektoren: AB = (1|1|-1), AC = (-1|2|2)

n = AB × AC = (2 - (-2) | 1 - 2 | 2 - (-1)) = (4|-1|3)

d = n · A = 4 · 0 + (-1) · 3 + 3 · 1 = 0 - 3 + 3 = 0

E: 4x1 - x2 + 3x3 = 0 (Probe: B ergibt 0, C ergibt 0 (stimmt))

2 Berechne den Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene E.

Die Koordinaten von g (mit t) in die Ebenengleichung einsetzen, nach t auflösen und t in g einsetzen.

a) g: x = (-3|3|-10) + t · (2|-1|3), E: x1 + 2x2 + x3 = 2

g in E einsetzen: 1 · (-3 + 2t) + 2 · (3 - t) + 1 · (-10 + 3t) = 2

Zusammenfassen: -7 + 3t = 2 → 3t = 9 → t = 3

t = 3 in g einsetzen: S = (-3|3|-10) + 3 · (2|-1|3) = (3|0|-1)

b) g: x = (-7|-2|-5) + t · (3|1|1), E: -2x1 + 3x2 = 2

g in E einsetzen: -2 · (-7 + 3t) + 3 · (-2 + t) = 2

Zusammenfassen: 8 - 3t = 2 → -3t = -6 → t = 2

t = 2 in g einsetzen: S = (-7|-2|-5) + 2 · (3|1|1) = (-1|0|-3)

c) g: x = (-9|-3|1) + t · (-3|-1|1), E: -3x1 + x2 - 3x3 = 11

g in E einsetzen: -3 · (-9 - 3t) + 1 · (-3 - t) - 3 · (1 + t) = 11

Zusammenfassen: 21 + 5t = 11 → 5t = -10 → t = -2

t = -2 in g einsetzen: S = (-9|-3|1) - 2 · (-3|-1|1) = (-3|-1|-1)

3 Berechne den Abstand des Punktes P von der Ebene E.

Hessesche Normalform: die Ebene als n1x1 + n2x2 + n3x3 - d = 0 schreiben und durch |n| teilen. P einsetzen, der Betrag ist der Abstand.

a) P(-1|4|1), E: -x1 - 8x2 - 4x3 = -44

|n| = √((-1)² + (-8)² + (-4)²) = 9, Hessesche Normalform: (-x1 - 8x2 - 4x3 + 44) / 9 = 0

P einsetzen: ((-1) · (-1) + (-8) · 4 + (-4) · 1 + 44) / 9 = 9 / 9 = 1

Abstand = |1| = 1 LE

b) P(1|4|3), E: -8x1 - x2 - 4x3 = -15

|n| = √((-8)² + (-1)² + (-4)²) = 9, Hessesche Normalform: (-8x1 - x2 - 4x3 + 15) / 9 = 0

P einsetzen: ((-8) · 1 + (-1) · 4 + (-4) · 3 + 15) / 9 = -9 / 9 = -1

Abstand = |-1| = 1 LE

4 Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden g und h.

Erst die Richtungsvektoren: Sind sie Vielfache, sind g und h parallel oder identisch (Punktprobe). Sonst gleichsetzen, aus zwei Zeilen t und s bestimmen und die dritte prüfen: Passt sie, schneiden sich g und h, sonst sind sie windschief.

a) g: x = (-5|-2|-1) + t · (-3|0|-1), h: x = (-2|-2|-6) + s · (0|-1|3)

(0|-1|3) ist kein Vielfaches von (-3|0|-1) (in Zeile 1 hat h eine 0, g nicht) → nicht parallel

Gleichsetzen, Zeile 1: -5 - 3t = -2 → t = -1

Zeile 3 mit t = -1: 0 = -6 + 3s → s = 2

Probe in Zeile 2 mit t = -1 und s = 2: links -2, rechts -4, -2 ≠ -4

Zeile 2 passt nicht: g und h haben keinen gemeinsamen Punkt und sind nicht parallel, also windschief.

b) g: x = (-3|-1|2) + t · (2|1|-2), h: x = (4|0|-2) + s · (-3|1|0)

(-3|1|0) ist kein Vielfaches von (2|1|-2) (in Zeile 3 hat h eine 0, g nicht) → nicht parallel

Gleichsetzen, Zeile 3: 2 - 2t = -2 → t = 2

Zeile 2 mit t = 2: 1 = s → s = 1

Probe in Zeile 1 mit t = 2 und s = 1: links 1, rechts 1 (stimmt)

Alle Zeilen passen: g und h schneiden sich in S(1|1|-2).

c) g: x = (0|0|0) + t · (-1|-2|-1), h: x = (-1|-2|-1) + s · (2|4|2)

(2|4|2) = (-2) · (-1|-2|-1) → g und h sind parallel oder identisch

Punktprobe: Liegt der Stützpunkt (-1|-2|-1) von h auf g? Zeile 1: -t = -1 → t = 1

Mit t = 1 in den anderen Zeilen: Zeile 2: -2 = -2 (stimmt), Zeile 3: -1 = -1 (stimmt)

Der Punkt liegt auf g: g und h sind identisch.

5 Berechne den Schnittwinkel der Geraden g mit der Ebene E.

Beim Winkel zwischen Gerade und Ebene steht sin statt cos: sin(α) = |n · u| / (|n| · |u|). n ist der Normalenvektor von E, u der Richtungsvektor von g. Runde α auf eine Nachkommastelle.

a) g: x = (-2|1|-1) + t · (-6|-9|2), E: 2x1 + 6x2 + 3x3 = -4

n · u = 2 · (-6) + 6 · (-9) + 3 · 2 = -12 - 54 + 6 = -60, |n| = 7, |u| = 11

sin(α) = |-60| / (7 · 11) = $\frac{60}{77}$ ≈ 0,7792 → α ≈ 51,2°

b) g: x = (3|0|1) + t · (1|8|4), E: -4x1 - 3x2 = -3

n · u = (-4) · 1 + (-3) · 8 + 0 · 4 = -4 - 24 + 0 = -28, |n| = 5, |u| = 9

sin(α) = |-28| / (5 · 9) = $\frac{28}{45}$ ≈ 0,6222 → α ≈ 38,5°