Abi-Training: Analysis

Mathematik · Klasse 12 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

kostenlos, mit Lösungen

Name: _____ Datum: _____

1 Bestimme Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkt.

Schreib jeden Schritt auf, im Abitur gibt es die Punkte für den Weg. Erst f', f'' und f'''. Nullstellen: x^2 ausklammern. Extremstellen: f'(x) = 0, dann entscheidet f'': < 0 Hochpunkt, > 0 Tiefpunkt. Wendestelle: f''(x) = 0 und f'''(x) ≠ 0. Die y-Werte rechnest du mit f aus.

a) $f(x) = -x^3 - 3x^2$

$f'(x) = -3x^2 - 6x$, $f''(x) = -6x - 6$, $f'''(x) = -6$

Nullstellen: $-x^2 \cdot (x + 3) = 0 \rightarrow x = 0$ (doppelt) oder $x = -3$

Notwendig f'(x) = 0: $-3x \cdot (x + 2) = 0 \rightarrow x = 0$ oder $x = -2$

Hinreichend: $f''(0) = -6 < 0 \rightarrow H(0|0)$, $f''(-2) = 6 > 0 \rightarrow T(-2|-4)$

Wendestelle: $f''(x) = 0 \rightarrow x = -1$, $f'''(-1) = -6 \neq 0 \rightarrow W(-1|-2)$

b) $f(x) = -x^3 + 9x^2$

$f'(x) = -3x^2 + 18x$, $f''(x) = -6x + 18$, $f'''(x) = -6$

Nullstellen: $-x^2 \cdot (x - 9) = 0 \rightarrow x = 0$ (doppelt) oder $x = 9$

Notwendig f'(x) = 0: $-3x \cdot (x - 6) = 0 \rightarrow x = 0$ oder $x = 6$

Hinreichend: $f''(0) = 18 > 0 \rightarrow T(0|0)$, $f''(6) = -18 < 0 \rightarrow H(6|108)$

Wendestelle: $f''(x) = 0 \rightarrow x = 3$, $f'''(3) = -6 \neq 0 \rightarrow W(3|54)$

c) $f(x) = x^3 + 6x^2$

$f'(x) = 3x^2 + 12x$, $f''(x) = 6x + 12$, $f'''(x) = 6$

Nullstellen: $x^2 \cdot (x + 6) = 0 \rightarrow x = 0$ (doppelt) oder $x = -6$

Notwendig f'(x) = 0: $3x \cdot (x + 4) = 0 \rightarrow x = 0$ oder $x = -4$

Hinreichend: $f''(0) = 12 > 0 \rightarrow T(0|0)$, $f''(-4) = -12 < 0 \rightarrow H(-4|32)$

Wendestelle: $f''(x) = 0 \rightarrow x = -2$, $f'''(-2) = 6 \neq 0 \rightarrow W(-2|16)$

Abi-Training: Analysis (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 12 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

kostenlos, mit Lösungen

Name: _____ Datum: _____

2 Berechne den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse.

Die Nullstellen sind die Grenzen. Wechselt f dazwischen das Vorzeichen, rechnest du stückweise und addierst die Beträge. Liegt die Fläche unter der x-Achse, ist das Integral negativ.

a) $f(x) = -4x^3 + 16x$

Nullstellen: $-4x \cdot (x^2 - 4) = 0 \rightarrow x = -2, x = 0, x = 2$

f wechselt bei x = 0 das Vorzeichen, also in zwei Stücken rechnen. $F(x) = -x^4 + 8x^2$

$F(0) - F(-2) = 0 - 16 = -16$, $F(2) - F(0) = 16 - 0 = 16$

A = 16 + 16 = 32 FE (Beträge addieren)

b) $f(x) = 3x^2 + 12x + 9$

Nullstellen: $x^2 + 4x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$ oder $x = -1$

$F(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$

$F(-1) - F(-3) = -4 - 0 = -4$

Das Integral ist negativ, die Fläche liegt unter der x-Achse: $A = |-4| = 4$ FE

c) $f(x) = 4x^3 - 36x$

Nullstellen: $4x \cdot (x^2 - 9) = 0 \rightarrow x = -3, x = 0, x = 3$

f wechselt bei x = 0 das Vorzeichen, also in zwei Stücken rechnen. $F(x) = x^4 - 18x^2$

$F(0) - F(-3) = 0 - (-81) = 81$, $F(3) - F(0) = -81 - 0 = -81$

A = 81 + 81 = 162 FE (Beträge addieren)

3 Bestimme den Extrempunkt und seine Art.

Produktregel: $(u \cdot v)' = u'v + uv'$. Kettenregel: $(e^{kx})' = k \cdot e^{kx}$, das Minus kommt mit: $(e^{-3x})' = -3 \cdot e^{-3x}$. Dann den e-Term ausklammern: Er ist nie 0, nur die Klammer kann 0 werden. Die Art zeigt der Vorzeichenwechsel von f'.

a) $f(x) = x \cdot e^{-4x}$

Produkt- und Kettenregel: $f'(x) = 1 \cdot e^{-4x} + x \cdot (-4) \cdot e^{-4x} = e^{-4x} \cdot (1 - 4x)$

Notwendig: $e^{-4x} > 0$, also $1 - 4x = 0 \rightarrow x = \frac{1}{4}$

Vorzeichen: $f'(0) = 1 > 0$, $f'(1) = e^{-4} \cdot (-3) < 0 \rightarrow$ f' wechselt von + nach -: Hochpunkt

$f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4} \cdot e^{-1} = 1/(4e) \approx 0{,}092 \rightarrow H(\frac{1}{4} \mid 1/(4e))$

b) $f(x) = x \cdot e^{5x}$

Produkt- und Kettenregel: $f'(x) = 1 \cdot e^{5x} + x \cdot 5 \cdot e^{5x} = e^{5x} \cdot (1 + 5x)$

Notwendig: $e^{5x} > 0$, also $1 + 5x = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{5}$

Vorzeichen: $f'(-1) = e^{-5} \cdot (-4) < 0$, $f'(0) = 1 > 0 \rightarrow f'$ wechselt von - nach +: Tiefpunkt

$f(-\frac{1}{5}) = -\frac{1}{5} \cdot e^{-1} = -1/(5e) \approx -0{,}074 \rightarrow T(-\frac{1}{5} \mid -1/(5e))$

c) $f(x) = (x - 1) \cdot e^{-x}$

Produkt- und Kettenregel: $f'(x) = e^{-x} - (x - 1) \cdot e^{-x} = e^{-x} \cdot (-x + 2)$

Notwendig: $e^{-x} > 0$, also $-x + 2 = 0 \rightarrow x = 2$

Vorzeichen: $f'(1) = e^{-1} \cdot 1 > 0$, $f'(3) = e^{-3} \cdot (-1) < 0 \rightarrow$ von + nach -: Hochpunkt

$f(2) = 1 \cdot e^{-2} = e^{-2} \approx 0{,}135 \rightarrow H(2 \mid e^{-2})$

4 Berechne den Inhalt der Fläche zwischen den beiden Graphen.

Die Schnittstellen sind die Grenzen: $f(x) = g(x)$ setzen. Dann die Differenz $f(x) - g(x)$ integrieren und den Betrag nehmen.

a) $f(x) = 2x^2 - 1$, $g(x) = -x^2 - 6x + 8$

Schnittstellen: $f(x) = g(x) \rightarrow 3x^2 + 6x - 9 = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow x = -3$ oder $x = 1$

Differenz: $f(x) - g(x) = 3x^2 + 6x - 9$, Stammfunktion $D(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$

$D(1) - D(-3) = -5 - 27 = -32$

$A = |-32| = 32$ FE (g liegt oben)

b) $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $g(x) = 4x^2 + 4x + 1$

Schnittstellen: $f(x) = g(x) \rightarrow -3x^2 - 6x = 0 \rightarrow x^2 + 2x = 0 \rightarrow x = -2$ oder $x = 0$

Differenz: $f(x) - g(x) = -3x^2 - 6x$, Stammfunktion $D(x) = -x^3 - 3x^2$

$D(0) - D(-2) = 0 - (-4) = 4$

$A = |4| = 4$ FE (f liegt oben)

Abi-Training: Analysis (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 12 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

Name: _____ Datum: _____

kostenlos, mit Lösungen

5 Löse das Extremwertproblem.

Stell die Zielfunktion A(u) auf, leite ab und setze A'(u) = 0. Mit A''(u) < 0 zeigst du, dass es ein Maximum ist.

a) Unter dem Graphen von f(x) = 27 - x² liegt ein Rechteck. Eine Ecke liegt im Ursprung, zwei Seiten liegen auf den Achsen, die vierte Ecke P(u|f(u)) liegt auf dem Graphen (u > 0). Für welches u ist der Flächeninhalt am größten? Wie groß ist er dann?

Zielfunktion: $A(u) = u \cdot f(u) = u \cdot (27 - u^2) = 27u - u^3$ mit $0 < u < \sqrt{27}$

$A'(u) = 27 - 3u^2 = 0 \rightarrow u^2 = 9 \rightarrow u = 3$ ($u > 0$)

$A''(u) = -6u$, $A''(3) = -18 < 0 \rightarrow$ Maximum

$A(3) = 3 \cdot 18 = 54$ FE

b) Unter dem Graphen von f(x) = 12 - x² liegt ein Rechteck, symmetrisch zur y-Achse. Zwei Ecken liegen auf der x-Achse, die oberen Ecken (-u|f(u)) und (u|f(u)) auf dem Graphen. Für welches u ist der Flächeninhalt am größten? Wie groß ist er dann?

Zielfunktion: $A(u) = 2u \cdot f(u) = 2u \cdot (12 - u^2) = 24u - 2u^3$ mit $0 < u < \sqrt{12}$

$A'(u) = 24 - 6u^2 = 0 \rightarrow u^2 = 4 \rightarrow u = 2$ ($u > 0$)

$A''(u) = -12u$, $A''(2) = -24 < 0 \rightarrow$ Maximum

$A(2) = 4 \cdot 8 = 32$ FE