Zufallsgrößen und Erwartungswert

Mathematik · Klasse 11 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

kostenlos, mit Lösungen

Name: _____ Datum: _____

1 Ist das Glücksrad fair? Berechne den Erwartungswert des Gewinns X.

Gewinn = Auszahlung - Einsatz, für jedes Feld. Dann ist E(X) die Summe aus Gewinn mal Wahrscheinlichkeit. Fair ist das Spiel, wenn E(X) = 0 ist.

a) Auszahlung: 0 € | 4 € | 20 €
Wahrscheinlichkeit: 0,5 | 0,3 | 0,2
Einsatz: 2 €

Gewinn = Auszahlung - Einsatz: -2 € | 2 € | 18 €

E(X) = (-2) · 0,5 + 2 · 0,3 + 18 · 0,2 = 3,20 €

Im Mittel gewinnst du 3,20 € pro Spiel. Das Spiel ist nicht fair.

b) Auszahlung: 0 € | 2 € | 15 €
Wahrscheinlichkeit: 0,6 | 0,3 | 0,1
Einsatz: 2,10 €

Gewinn = Auszahlung - Einsatz: -2,10 € | -0,10 € | 12,90 €

E(X) = (-2,10) · 0,6 + (-0,10) · 0,3 + 12,90 · 0,1 = 0 €

Das Spiel ist fair.

2 Das Spiel soll fair sein. Bestimme die fehlende Größe.

Fair heißt E(X) = 0: Im Mittel bekommst du genau deinen Einsatz zurück. Die mittlere Auszahlung ist Auszahlung mal Gewinnwahrscheinlichkeit.

a) Einsatz 4 €, Gewinnwahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}$, Auszahlung gesucht

Fair heißt E(X) = 0: Im Mittel bekommst du deinen Einsatz zurück.

Auszahlung · $\frac{1}{5}$ = 4

Auszahlung = 4 · 5 = 20 € (Reingewinn 16 €)

b) Auszahlung 40 €, Gewinnwahrscheinlichkeit $\frac{1}{10}$, Einsatz gesucht

Fair heißt: Einsatz = mittlere Auszahlung

Einsatz = 40 · $\frac{1}{10}$ = 4 €

Zufallsgrößen und Erwartungswert (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 11 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

Name: _____ Datum: _____

kostenlos, mit Lösungen

3 X zählt die roten Kugeln. Stelle die Verteilung von X auf und berechne E(X).

Zeichne ein Baumdiagramm: Beim zweiten Zug liegt eine Kugel weniger in der Urne. Zu X = 1 gehören zwei Pfade.

a) Urne mit 2 roten und 6 blauen Kugeln, du ziehst zweimal ohne Zurücklegen

$P(X = 0) = \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{28}$

$P(X = 1) = \frac{2}{8} \cdot \frac{6}{7} + \frac{6}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$

$P(X = 2) = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{28}$

$E(X) = 0 \cdot \frac{15}{28} + 1 \cdot \frac{3}{7} + 2 \cdot \frac{1}{28} = 0{,}5$

b) Urne mit 2 roten und 3 blauen Kugeln, du ziehst zweimal ohne Zurücklegen

$P(X = 0) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$

$P(X = 1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{5}$

$P(X = 2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

$E(X) = 0 \cdot \frac{3}{10} + 1 \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{1}{10} = 0{,}8$

4 Berechne E(X), die Varianz V(X) und die Standardabweichung σ.

V(X) ist die Summe aus $(x - E(X))^2$ mal Wahrscheinlichkeit. $\sigma = \sqrt{V(X)}$ misst, wie stark die Werte um E(X) streuen: Je größer σ, desto stärker schwanken sie.

a) x: 9 | 14 | 19
P(X = x): 0,08 | 0,84 | 0,08

$E(X) = 9 \cdot 0{,}08 + 14 \cdot 0{,}84 + 19 \cdot 0{,}08 = 14$

$V(X) = (9 - 14)^2 \cdot 0{,}08 + (14 - 14)^2 \cdot 0{,}84 + (19 - 14)^2 \cdot 0{,}08$

$= 25 \cdot 0{,}08 + 0 \cdot 0{,}84 + 25 \cdot 0{,}08 = 4$

$\sigma = \sqrt{4} = 2$

b) x: 6 | 11 | 16
P(X = x): 0,32 | 0,36 | 0,32

$E(X) = 6 \cdot 0{,}32 + 11 \cdot 0{,}36 + 16 \cdot 0{,}32 = 11$

$V(X) = (6 - 11)^2 \cdot 0{,}32 + (11 - 11)^2 \cdot 0{,}36 + (16 - 11)^2 \cdot 0{,}32$

$= 25 \cdot 0{,}32 + 0 \cdot 0{,}36 + 25 \cdot 0{,}32 = 16$

$\sigma = \sqrt{16} = 4$