Trigonometrische Funktionen

Mathematik · Klasse 11 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

kostenlos, mit Lösungen

Name: _____ Datum: _____

1 Bestimme sin und cos mit der Symmetrie am Einheitskreis.

Zeichne den Punkt auf dem Einheitskreis, 180° entsprechen π. Die Beträge sind die des Bezugswinkels (spitzer Winkel zur x-Achse), das Vorzeichen liest du am Quadranten ab. Beispiel: sin(160°) = sin(20°), cos(160°) = -cos(20°).

a) sin(150°) und cos(150°)

Bezugswinkel 30°, 2. Quadrant

sin(150°) = ½, cos(150°) = -½√3

b) sin(3π/4) und cos(3π/4)

Bezugswinkel π/4, 2. Quadrant

sin(3π/4) = ½√2, cos(3π/4) = -½√2

c) sin(300°) und cos(300°)

Bezugswinkel 60°, 4. Quadrant

sin(300°) = -½√3, cos(300°) = ½

2 Bestimme alle Nullstellen im angegebenen Bereich.

Der Faktor vor sin oder cos ändert die Nullstellen nicht. sin u = 0 bei u = 0, π, 2π …, cos u = 0 bei u = π/2, 3π/2 … Setze u = bx und löse nach x auf. Die Ränder des Bereichs zählen mit.

a) f(x) = 3 · sin(3x), 0 ≤ x ≤ 2π

sin u = 0 für u = k · π (k ganze Zahl)

3x = k · π → x = k · π/3

x = 0; π/3; 2π/3; π; 4π/3; 5π/3; 2π (7 Nullstellen)

b) f(x) = 2 · sin(2x), 0 ≤ x ≤ 2π

sin u = 0 für u = k · π (k ganze Zahl)

2x = k · π → x = k · π/2

x = 0; π/2; π; 3π/2; 2π (5 Nullstellen)

Trigonometrische Funktionen (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 11 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

kostenlos, mit Lösungen

Name: _____ Datum: _____

c) $f(x) = 5 \cdot \sin(4x),\ 0 \le x \le \pi$

sin u = 0 für u = k · π (k ganze Zahl)

4x = k · π → x = k · π/4

x = 0; π/4; π/2; 3π/4; π (5 Nullstellen)

3 Löse die Gleichung für $0 \le x \le 2\pi$.

Bestimme erst den Bezugswinkel α mit sin α = |r| bzw. cos α = |r|. Dann nimm die zwei Quadranten mit dem passenden Vorzeichen: x = α, π - α, π + α oder 2π - α. Bei r = 1 oder -1 gibt es nur eine Lösung, bei sin x = 0 sind es 0, π und 2π. Liegt r nicht zwischen -1 und 1, gibt es keine.

a) $\sin x = ½$

Bezugswinkel: sin(π/6) = ½, sin ist im 1. und 2. Quadranten positiv

x = π/6 und x = π - π/6

x = π/6 oder x = 5π/6

b) $\cos x = -½\sqrt{2}$

Bezugswinkel π/4, cos ist im 2. und 3. Quadranten negativ

x = π - π/4 und x = π + π/4

x = 3π/4 oder x = 5π/4

c) $\sin x = 0$

sin x = 0 auf der x-Achse, also bei x = k · π

x = 0, x = π oder x = 2π (drei Lösungen, die Ränder zählen mit)

4 Leite ab.

(sin x)' = cos x und (cos x)' = -sin x. Steht bx in der Klammer, kommt der Faktor b nach vorn: (sin(5x))' = 5 · cos(5x).

a) $f(x) = 4 \cdot \cos(x)$ *f'(x) = -4 · sin(x)*

b) $f(x) = 4 \cdot \sin(4x)$ *f'(x) = 16 · cos(4x)*

c) $f(x) = 5 \cdot \cos(3x)$ *f'(x) = -15 · sin(3x)*

d) $f(x) = 2 \cdot \sin(x)$ *f'(x) = 2 · cos(x)*

Trigonometrische Funktionen (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 11 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

kostenlos, mit Lösungen

Name: _____ Datum: _____

5 Stelle die Funktionsgleichung auf.

Mittellinie d = (Max + Min) : 2, Amplitude a = (Max - Min) : 2, b = 2π : Periode. Liegt der Graph bei x = 0 auf der Mittellinie und steigt, nimm sin, fällt er dort, -sin. Startet er oben, nimm cos, startet er unten, -cos.

a) Hochpunkte bei y = 3, Tiefpunkte bei y = -1, Periode π/2. Bei x = 0 liegt der Graph auf der Mittellinie und fällt.

d = (3 + (-1)) : 2 = 1, a = (3 - (-1)) : 2 = 2

b = 2π : π/2 = 4

f(x) = -2 · sin(4x) + 1

b) Hochpunkte bei y = -1, Tiefpunkte bei y = -5, Periode 2π. Bei x = 0 liegt der Graph in einem Hochpunkt.

d = (-1 + (-5)) : 2 = -3, a = (-1 - (-5)) : 2 = 2

b = 2π : 2π = 1

f(x) = 2 · cos(x) - 3

6 Skizziere den Graphen.

Nimm auf der x-Achse 3 Kästchen für π/2 und auf der y-Achse 1 Kästchen je Einheit. Zeichne zuerst die Mittellinie y = d, dann Hoch- und Tiefpunkte im Abstand |a|, und verbinde sie zu einer Welle.

a) f(x) = 3 · cos(x) - 1 für 0 ≤ x ≤ 2π. Markiere die Mittellinie, die Hoch- und die Tiefpunkte.

Mittellinie y = -1. Der Graph startet oben in H(0 | 2), kreuzt bei π/2 die Mittellinie, hat den Tiefpunkt T(π | -4), kreuzt bei 3π/2 die Mittellinie und endet in H(2π | 2).

Trigonometrische Funktionen (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 11 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

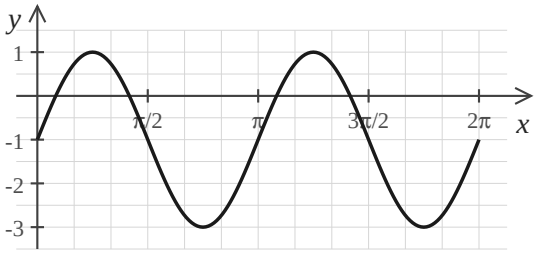
kostenlos, mit Lösungen

Name: _____ Datum: _____

7 Stelle die Funktionsgleichung zum Graphen auf.

Lies Hoch- und Tiefpunkte ab: d = (Max + Min) : 2, a = (Max - Min) : 2. Die Periode ist der Abstand zweier Hochpunkte, b = 2π : Periode. Startet der Graph auf der Mittellinie und steigt: sin, fällt er: -sin. Startet er oben: cos, unten: -cos. Ein Kästchen nach rechts ist π/6.

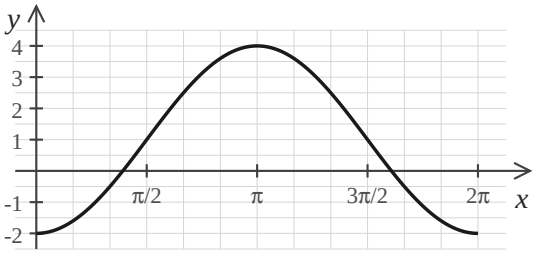
a) Gib die Funktionsgleichung an.



d = -1, a = 2, Periode π, also b = 2

Mitte, steigend: f(x) = 2 · sin(2x) - 1

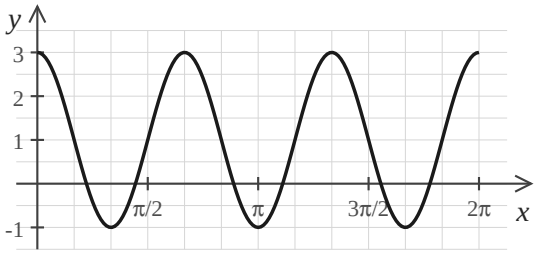
b) Gib die Funktionsgleichung an.



d = 1, a = 3, Periode 2π, also b = 1

startet unten: f(x) = -3 · cos(x) + 1

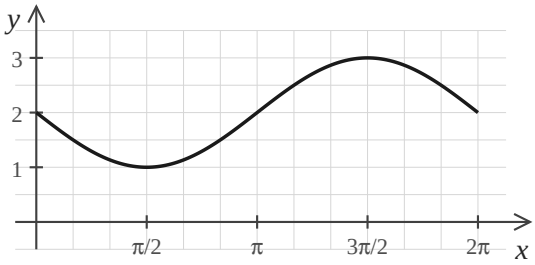
c) Gib die Funktionsgleichung an.



d = 1, a = 2, Periode 2π/3, also b = 3

startet oben: f(x) = 2 · cos(3x) + 1

d) Gib die Funktionsgleichung an.



d = 2, a = 1, Periode 2π, also b = 1

Mitte, fallend: f(x) = -sin(x) + 2

Trigonometrische Funktionen (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 11 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

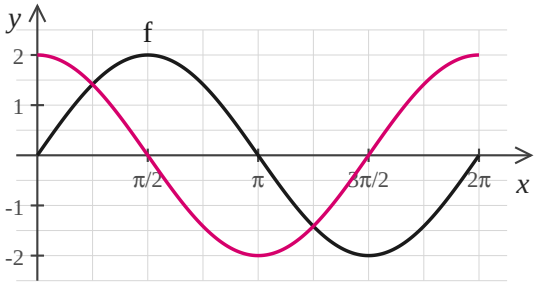
kostenlos, mit Lösungen

Name: _____ Datum: _____

8 Leite grafisch ab: Skizziere f' in dasselbe Koordinatensystem.

Wo f einen Hoch- oder Tiefpunkt hat, ist f' = 0. Wo f am steilsten steigt, hat f' einen Hochpunkt, wo f am steilsten fällt, einen Tiefpunkt. Die Steigung liest du mit einer Tangente ab.

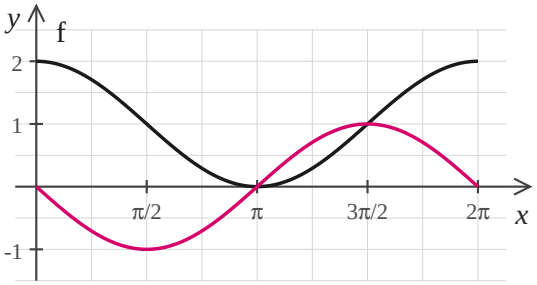
a) Skizziere f' und gib f'(x) an.



f' = 0 bei π/2, 3π/2; Steigung 2 bei 0 und 2π

f'(x) = 2 · cos(x)

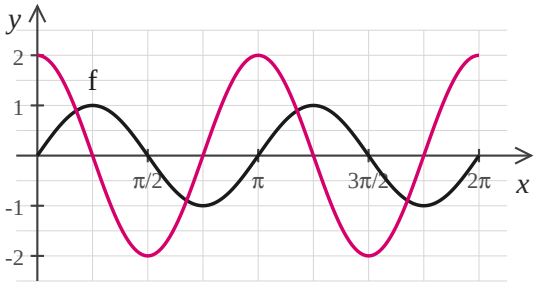
b) Skizziere f' und gib f'(x) an.



f' = 0 bei 0, π, 2π; Steigung -1 bei π/2

f'(x) = -sin(x)

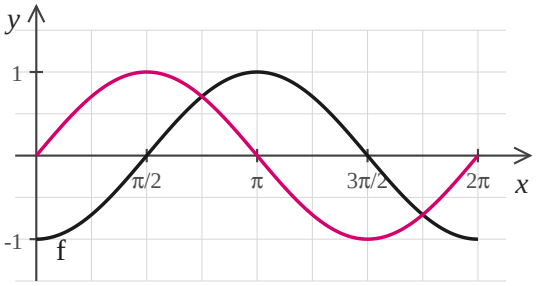
c) Skizziere f' und gib f'(x) an.



f' = 0 bei π/4, 3π/4 …; Steigung 2 bei 0

f'(x) = 2 · cos(2x)

d) Skizziere f' und gib f'(x) an.



f' = 0 bei 0, π, 2π; Steigung 1 bei π/2

f'(x) = sin(x)