Orthogonale Geraden und Normalen

Mathematik · Klasse 11 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

kostenlos, mit Lösungen

Name: _____ Datum: _____

Zwei Geraden sind orthogonal (stehen senkrecht aufeinander), wenn das Produkt ihrer Steigungen -1 ist: m1 · m2 = -1. Die Normale an einen Graphen steht im Berührpunkt senkrecht auf der Tangente.

1 Bestimme die Gerade durch A und B und die dazu orthogonale Gerade durch C.

Steigung aus zwei Punkten: m = (y2 - y1) : (x2 - x1). Die Orthogonale hat $-\frac{1}{m}$, dann C einsetzen.

a) A(0 | 1), B(2 | 5), C(4 | 0)

m = 4 : 2 = 2, also g(x) = 2x + 1

m(h) = $-\frac{1}{2}$: 0 = -2 + b, b = 2

h(x) = $-\frac{1}{2}$ x + 2

b) A(-1 | 4), B(2 | 1), C(3 | 5)

m = -3 : 3 = -1, also g(x) = -x + 3

m(h) = 1: 5 = 3 + b, b = 2

h(x) = x + 2

c) A(0 | -2), B(3 | 0), C(2 | 3)

m = $\frac{2}{3}$, also g(x) = $\frac{2}{3}$ x - 2

m(h) = $-\frac{3}{2}$: 3 = -3 + b, b = 6

h(x) = $-\frac{3}{2}$ x + 6

2 Bestimme die Gleichung der Normalen an den Graphen von f an der Stelle x0.

Normale = Gerade durch P(x0 | f(x0)), die senkrecht auf der Tangente steht: n(x) = $-\frac{1}{f'}$(x0) · (x - x0) + f(x0).

a) $f(x) = x^2$, x0 = 1

f(1) = 1, f'(x) = 2x, f'(1) = 2

m = $-\frac{1}{2}$: n(x) = $-\frac{1}{2}$ (x - 1) + 1 = $-\frac{1}{2}$ x + $\frac{3}{2}$

b) $f(x) = x^3 - 2x$, x0 = 1

f(1) = -1, f'(x) = $3x^2$ - 2, f'(1) = 1

m = -1: n(x) = -(x - 1) - 1 = -x

Orthogonale Geraden und Normalen (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 11 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

Name: _____ Datum: _____

kostenlos, mit Lösungen

c) $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x$, $x_0 = 4$

$f(4) = 0$, $f'(x) = x - 2$, $f'(4) = 2$

$m = -\frac{1}{2}$: $n(x) = -\frac{1}{2}(x - 4) = -\frac{1}{2}x + 2$

d) $f(x) = \frac{4}{x}$, $x_0 = 2$

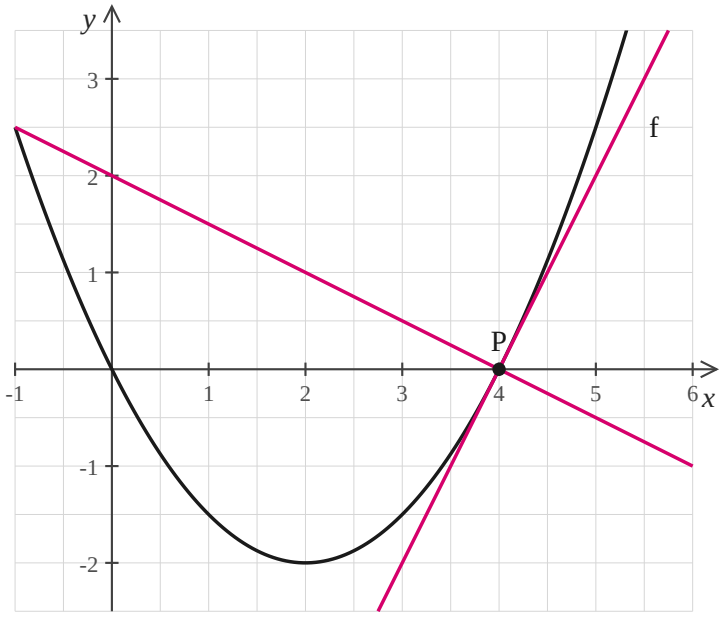
$f(2) = 2$, $f'(x) = -4/x^2$, $f'(2) = -1$

$m = 1$: $n(x) = (x - 2) + 2 = x$

3 Zeichne die Tangente und die Normale an den Graphen von $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x$ im Punkt P(4 | 0).

Tangente: Steigung $f'(4) = 2$. Normale: Steigung $-\frac{1}{2}$. Beide gehen durch P.

a) Tangente t und Normale n in P



$t(x) = 2x - 8$: von P 1 nach rechts, 2 nach oben

$n(x) = -\frac{1}{2}x + 2$: von P 2 nach links, 1 nach oben; t und n bilden in P einen rechten Winkel

Orthogonale Geraden und Normalen (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 11 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

Name: _____ Datum: _____

kostenlos, mit Lösungen

4 Berechne mit Tangente und Normale.

Schnittpunkt mit der x-Achse: Gerade = 0 setzen. Dreiecksfläche = Grundseite · Höhe : 2.

a) $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$. Wo schneiden Tangente und Normale die x-Achse?

$t(x) = 2x - 1$: $x = \frac{1}{2}$

$n(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$: $x = 3$

b) Tangente, Normale (aus der Teilaufgabe davor) und x-Achse bilden ein Dreieck. Berechne seinen Flächeninhalt.

Grundseite auf der x-Achse: $3 - \frac{1}{2} = 2{,}5$

Höhe = $f(1) = 1$, also $A = 2{,}5 \cdot 1 : 2 = 1{,}25$

c) $f(x) = x^3 - 2x$, $x_0 = 1$. Wo schneidet die Normale $n(x) = -x$ den Graphen von f noch?

$x^3 - 2x = -x$, also $x^3 - x = 0$ und $x \cdot (x^2 - 1) = 0$

$x = 0$ und $x = -1$ ($x = 1$ ist P): Punkte $(0 \mid 0)$ und $(-1 \mid 1)$

5 Hat das Dreieck ABC einen rechten Winkel? Prüfe mit den Steigungen der Seiten.

Berechne die Steigungen von AB, BC und AC. Ist ein Produkt -1, liegt dort ein rechter Winkel.

a) $A(0 \mid 0)$, $B(4 \mid 2)$, $C(3 \mid 4)$

$m(AB) = \frac{1}{2}$, $m(BC) = 2 : (-1) = -2$

$\frac{1}{2} \cdot (-2) = -1$: rechter Winkel bei B

b) $A(-1 \mid 1)$, $B(2 \mid 3)$, $C(4 \mid 0)$

$m(AB) = \frac{2}{3}$, $m(BC) = -\frac{3}{2}$

$\frac{2}{3} \cdot (-\frac{3}{2}) = -1$: rechter Winkel bei B

c) $A(0 \mid 0)$, $B(4 \mid 0)$, $C(1 \mid 3)$

$m(AB) = 0$, $m(BC) = -1$, $m(AC) = 3$

Kein Produkt ist -1 (AB ist waagerecht, aber keine Seite senkrecht): kein rechter Winkel