Kurvendiskussion ganzrationaler Funktionen

Mathematik · Klasse 11 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

kostenlos, mit Lösungen

Name: _____ Datum: _____

1 Bestimme die Hoch- und Tiefpunkte.

Notwendig ist f'(x) = 0. Hinreichend ist dann f''(x) ≠ 0: negativ heißt Hochpunkt, positiv heißt Tiefpunkt. Die y-Koordinate holst du aus f.

a) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$

$f'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = 0 \rightarrow x = -1$ oder $x = 3$

$f''(x) = -6x + 6$: $f''(-1) = 12 > 0 \rightarrow T(-1 \mid -7)$

$f''(3) = -12 < 0 \rightarrow H(3 \mid 25)$

b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 5$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \rightarrow x = 1$ oder $x = 3$

$f''(x) = 6x - 12$: $f''(1) = -6 < 0 \rightarrow H(1 \mid -1)$

$f''(3) = 6 > 0 \rightarrow T(3 \mid -5)$

c) $f(x) = -x^4 + 8x^2 - 1$

$f'(x) = -4x^3 + 16x = -4x(x^2 - 4) = 0 \rightarrow x = -2, x = 0, x = 2$

$f''(x) = -12x^2 + 16$: $f''(0) = 16 > 0 \rightarrow T(0 \mid -1)$

$f''(\pm 2) = -32 < 0 \rightarrow H(-2 \mid 15)$ und $H(2 \mid 15)$

2 Bestimme den Wendepunkt.

Notwendig ist f''(x) = 0, hinreichend zusätzlich f'''(x) ≠ 0. Die y-Koordinate holst du aus f. Wo f'' < 0 ist, ist der Graph rechtsgekrümmt, wo f'' > 0 ist, linksgekrümmt.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 15$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 15$, $f''(x) = 6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2$

$f'''(x) = 6 \neq 0$, $f(2) = -1 \rightarrow W(2 \mid -1)$, erst rechts-, dann linksgekrümmt

b) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 9x + 6$

$f'(x) = -3x^2 + 6x - 9$, $f''(x) = -6x + 6 = 0 \rightarrow x = 1$

$f'''(x) = -6 \neq 0$, $f(1) = -1 \rightarrow W(1 \mid -1)$, erst links-, dann rechtsgekrümmt

Kurvendiskussion ganzrationaler Funktionen (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 11 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

Name: _____ Datum: _____

kostenlos, mit Lösungen

c) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 18x + 23$

$f'(x) = 3x^2 + 12x + 18$, $f''(x) = 6x + 12 = 0 \rightarrow x = -2$

$f'''(x) = 6 \neq 0$, $f(-2) = 3 \rightarrow W(-2 \mid 3)$, erst rechts-, dann linksgekrümmt

3 Bestimme die Nullstellen mit Substitution.

Setze $z = x^2$. Aus x^4 wird z^2, aus x^2 wird z. Löse die quadratische Gleichung und zieh dann aus jedem z die Wurzel. Ein negatives z gibt keine Nullstelle.

a) $f(x) = x^4 - 17x^2 + 16$

$z = x^2$: $z^2 - 17z + 16 = 0 \rightarrow z = 1$ oder $z = 16$

$x^2 = 1$ oder $x^2 = 16 \rightarrow x = -4, x = -1, x = 1, x = 4$

b) $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$

$z = x^2$: $z^2 - 13z + 36 = 0 \rightarrow z = 4$ oder $z = 9$

$x^2 = 4$ oder $x^2 = 9 \rightarrow x = -3, x = -2, x = 2, x = 3$

c) $f(x) = x^4 - 4x^2 - 45$

$z = x^2$: $z^2 - 4z - 45 = 0 \rightarrow z = -5$ oder $z = 9$

$x^2 = -5$ geht nicht, $x^2 = 9 \rightarrow x = -3, x = 3$

4 Gib an, wo der Graph steigt und wo er fällt.

Wo $f'(x) > 0$ ist, steigt der Graph. Wo $f'(x) < 0$ ist, fällt er. Das Vorzeichen von f' kann nur an den Nullstellen von f' wechseln.

a) $f(x) = -x^3 + 12x$

$f'(x) = -3x^2 + 12 = -3(x + 2)(x - 2)$

$f'(x) < 0$ für $x < -2$ und für $x > 2$: f fällt. $f'(x) > 0$ für $-2 < x < 2$: f steigt.

b) $f(x) = x^3 + 3x^2$

$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$

$f'(x) > 0$ für $x < -2$ und für $x > 0$: f steigt. $f'(x) < 0$ für $-2 < x < 0$: f fällt.