Klausur 2 Mathe 11: Funktionen und Ableitungen

Mathematik · Klasse 11 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

kostenlos, mit Lösungen

Name: _____ Datum: _____

Arbeitszeit 135 Minuten, 105 Punkte. Teil 1 (Aufgaben 1 bis 5) ohne Hilfsmittel, Teil 2 mit Taschenrechner. Schreib jeden Rechenweg auf.

1 Bilde die erste Ableitung. Löse Klammern vorher auf. (8 Punkte)

Potenzregel: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$. Ein Faktor vor dem x bleibt stehen, eine Zahl ohne x fällt weg. Ein Produkt mit x in beiden Faktoren erst ausmultiplizieren.

a) $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 5x - 7$ *$f'(x) = 8x^3 - 6x + 5$ (1 P)*

b) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 4$ *$f'(x) = -x^2 + x$ (1 P)*

c) $f(x) = (x - 2)(x + 3)$

Ausmultiplizieren: $f(x) = x^2 + 3x - 2x - 6 = x^2 + x - 6$

$f'(x) = 2x + 1$ (2 P)

d) $f(x) = x^2 \cdot (4 - x)$

$f(x) = 4x^2 - x^3$

$f'(x) = 8x - 3x^2$ (2 P)

e) $f(x) = (2x - 1)^2$

Binomische Formel: $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$

$f'(x) = 8x - 4$ (2 P)

2 Finde den Fehler und leite richtig ab. (6 Punkte)

Beschreibe zuerst in einem Satz, was falsch gemacht wurde. Dann rechne richtig.

a) Lena leitet $f(x) = 5x^3 - 2x + 7$ ab: $f'(x) = 15x^2 - 2x + 7$.

-2x wird zu -2 (aus x1 wird $x^0 = 1$), und die Zahl 7 fällt beim Ableiten weg.

Richtig: $f'(x) = 15x^2 - 2$ (2 P)

b) Emre leitet $f(x) = x \cdot (x^2 - 3)$ ab, indem er jeden Faktor einzeln ableitet: $f'(x) = 1 \cdot 2x = 2x$.

Ein Produkt darf man nicht faktorweise ableiten. Erst ausmultiplizieren: $f(x) = x^3 - 3x$.

Richtig: $f'(x) = 3x^2 - 3$ (2 P)

Klausur 2 Mathe 11: Funktionen und Ableitungen (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 11 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

Name: _____ Datum: _____

kostenlos, mit Lösungen

c) Duc leitet $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x$ ab: $f'(x) = 2x^5 - 1$.

Die Hochzahl wird beim Ableiten um 1 kleiner, nicht größer: aus x^4 wird $4x^3$.

Richtig: $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 4x^3 - 1 = 2x^3 - 1$ (2 P)

3 Berechne die Nullstellen mit dem angegebenen Verfahren. (13 Punkte)

pq-Formel für $x^2 + px + q = 0$: $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$. abc-Formel für $ax^2 + bx + c = 0$: $x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}) : (2a)$. Satz vom Nullprodukt: Ein Produkt ist 0, wenn ein Faktor 0 ist.

a) $f(x) = 2x^2 - 18$ (Umstellen nach x)

$2x^2 = 18$, also $x^2 = 9$

x1 = 3, x2 = -3 (2 P)

b) $f(x) = x^2 - 2x - 8$ (pq-Formel)

$x = 1 \pm \sqrt{1 + 8} = 1 \pm 3$

x1 = 4, x2 = -2 (2 P)

c) $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$ (abc-Formel)

$x = (-5 \pm \sqrt{25 + 24}) : 4 = (-5 \pm 7) : 4$

$x1 = \frac{1}{2}$, x2 = -3 (2 P)

d) $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x$ (Ausklammern, Satz vom Nullprodukt)

$x \cdot (x^2 - 4x - 5) = 0$, also $x = 0$ oder $x^2 - 4x - 5 = 0$

pq-Formel: $x = 2 \pm \sqrt{4 + 5} = 2 \pm 3$

x1 = 0, x2 = 5, x3 = -1 (3 P)

e) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ (Substitution $z = x^2$). Gib auch alle Schnittpunkte mit den Achsen an.

$z = x^2$: $z^2 - 5z + 4 = 0$, also $z = 2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 - 4} = 2{,}5 \pm 1{,}5$

$z = 4$ oder $z = 1$, also $x = \pm 2$ oder $x = \pm 1$

x-Achse: (-2 | 0), (-1 | 0), (1 | 0), (2 | 0). y-Achse: f(0) = 4, also (0 | 4) (4 P)

Klausur 2 Mathe 11: Funktionen und Ableitungen (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 11 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

Name: _____ Datum: _____

kostenlos, mit Lösungen

4 Untersuche die Symmetrie und das Verhalten für x → ±∞. (6 Punkte)

f(-x) = f(x): achsensymmetrisch zur y-Achse. f(-x) = -f(x): punktsymmetrisch zum Ursprung. Für x → ±∞ entscheidet nur der Summand mit der höchsten Potenz.

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$. Prüfe die Symmetrie rechnerisch.

$f(-x) = (-x)^4 - 3 \cdot (-x)^2 + 1 = x^4 - 3x^2 + 1 = f(x)$

achsensymmetrisch zur y-Achse (2 P)

b) $g(x) = 2x^3 - x$. Prüfe die Symmetrie rechnerisch.

$g(-x) = 2 \cdot (-x)^3 - (-x) = -2x^3 + x = -g(x)$

punktsymmetrisch zum Ursprung (2 P)

c) $f(x) = -2x^3 + 5x^2 + 1$. Wie verhält sich f für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$? Begründe.

Für große $|x|$ bestimmt $-2x^3$ den Verlauf: ungerade Hochzahl, negativer Faktor.

$x \to +\infty$: $f(x) \to -\infty$. $x \to -\infty$: $f(x) \to +\infty$ (2 P)

5 Rechne mit $f(x) = x^3 - 3x$. (6 Punkte)

Mittlere Änderungsrate in [a; b] (Steigung der Sekante): (f(b) - f(a)) : (b - a). Lokale Änderungsrate an der Stelle x0 (Steigung der Tangente): f'(x0).

a) Berechne f(-1) und f(2). *$f(-1) = -1 + 3 = 2$, $f(2) = 8 - 6 = 2$ (1 P)*

b) Berechne die mittlere Änderungsrate von f im Intervall [0; 2].

$f(0) = 0$

$(f(2) - f(0)) : (2 - 0) = (2 - 0) : 2 = 1$ (2 P)

c) Berechne die lokale Änderungsrate von f an der Stelle x = 2.

$f'(x) = 3x^2 - 3$, also $f'(2) = 12 - 3 = 9$ (1 P)

d) An welchen Stellen hat der Graph von f die Steigung 9?

$3x^2 - 3 = 9$, also $3x^2 = 12$ und $x^2 = 4$

$x = 2$ und $x = -2$ (2 P)

Klausur 2 Mathe 11: Funktionen und Ableitungen (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 11 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

Name: _____ Datum: _____

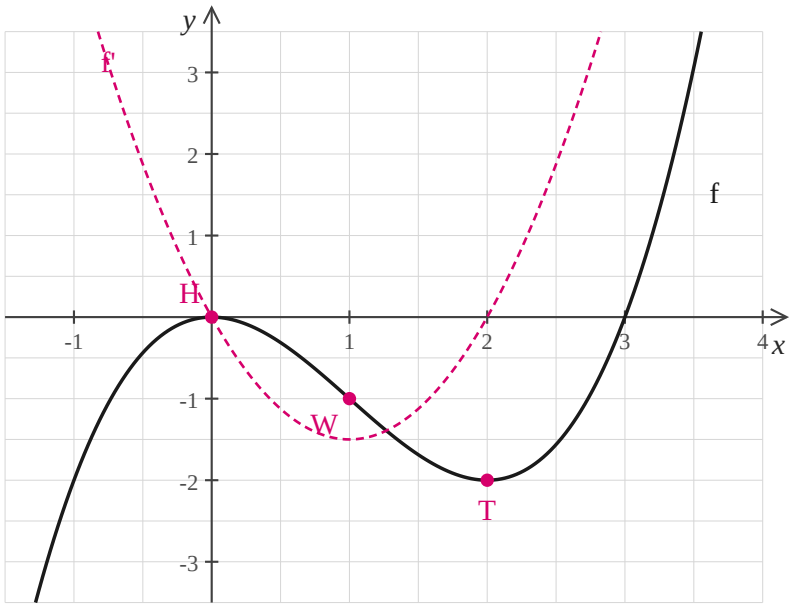
kostenlos, mit Lösungen

Teil 2: ab hier ist ein Taschenrechner erlaubt (nicht grafikfähig).

6 Gezeichnet ist der Graph von f mit f(x) = 0,5x³ - 1,5x². Arbeite in der Zeichnung. (6 Punkte)

Am Hoch- und Tiefpunkt ist die Tangente waagerecht. Am Wendepunkt ändert der Graph seine Krümmung, dort ist er am steilsten. Hoch- und Tiefpunkte von f werden Nullstellen von f'.

a) Markiere den Hochpunkt H, den Tiefpunkt T und den Wendepunkt W. Skizziere dann den Graphen von f' in dasselbe Koordinatensystem.



H(0 | 0), T(2 | -2), W(1 | -1)

f': nach oben offene Parabel mit den Nullstellen 0 und 2 (dort liegen H und T) und dem Tiefpunkt bei x = 1 (bei W fällt f am steilsten): f'(x) = 1,5x² - 3x (6 P)

7 Lies am Graphen von f aus der Aufgabe davor ab und begründe. (8 Punkte)

Gib Bereiche mit Ungleichungen oder als Intervall an, zum Beispiel x < 2 oder]-∞; 2[.

a) In welchen Intervallen steigt f, in welchem fällt f?

f steigt für x ≤ 0 und für x ≥ 2.

f fällt für 0 ≤ x ≤ 2. (2 P)

Klausur 2 Mathe 11: Funktionen und Ableitungen (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 11 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

Name: _____ Datum: _____

kostenlos, mit Lösungen

b) Für welche x gilt f(x) > 0? *Für x > 3, also]3; ∞[. Bei x = 0 berührt f die x-Achse nur. (1 P)*

c) Begründe mit dem Graphen von f, warum f' bei x = 1 seinen kleinsten Wert hat.

Bei x = 1 liegt der Wendepunkt W. Dort fällt f am steilsten,

die Steigung f' ist dort also am kleinsten: f'(1) = -1,5. (2 P)

d) Bestätige die Lage von H und T rechnerisch.

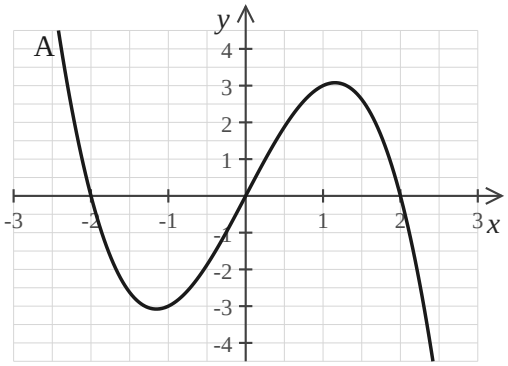
f'(x) = 1,5x² - 3x = 1,5x · (x - 2) = 0, also x = 0 oder x = 2

f(0) = 0 und f(2) = 4 - 6 = -2: H(0 | 0) und T(2 | -2) (3 P)

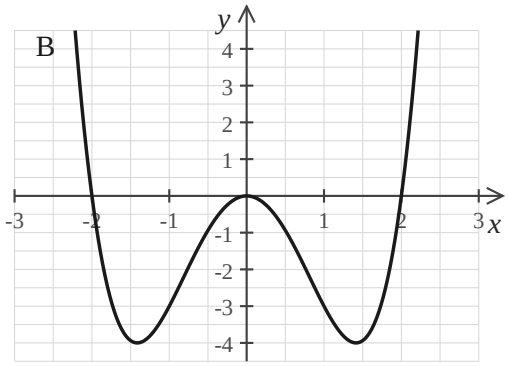
8 Ordne jedem Graphen die passende Gleichung zu und begründe kurz. (8 Punkte)

Zur Auswahl: (1) $f(x) = x^3 - 4x$; (2) $f(x) = -x^3 + 4x$; (3) $f(x) = x^4 - 4x^2$; (4) $f(x) = -x^4 + 4x^2$; (5) $f(x) = -0{,}5x^2 + 2$. Eine Gleichung bleibt übrig. Achte auf die Enden des Graphen, die Symmetrie und die Nullstellen.

a) Graph A



b) Graph B



(2): kommt von links oben und geht nach rechts unten wie $-x^3$, Nullstellen -2, 0 und 2 (2 P)

(3): beide Enden oben (x^4 mit positivem Faktor), achsensymmetrisch, berührt die x-Achse bei 0 (2 P)

Klausur 2 Mathe 11: Funktionen und Ableitungen (Fortsetzung)

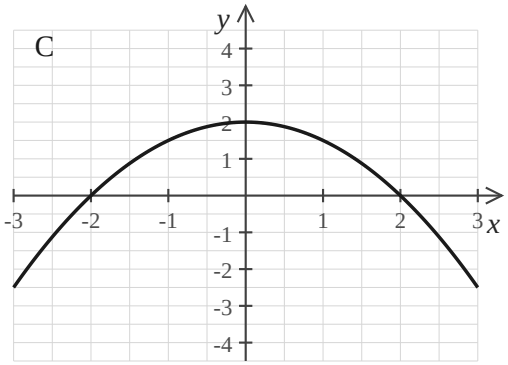
Mathematik · Klasse 11 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

Name: _____ Datum: _____

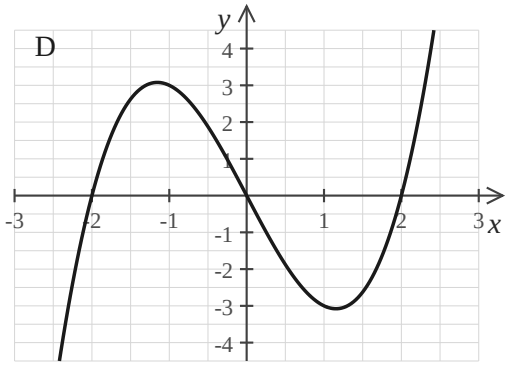
kostenlos, mit Lösungen

c) Graph C



(5): nach unten geöffnete Parabel mit Scheitel (0 | 2) und Nullstellen -2 und 2 (2 P)

d) Graph D



(1): kommt von links unten und geht nach rechts oben wie x³, Nullstellen -2, 0 und 2 (2 P)

9 Gib die Gleichung des verschobenen Graphen an. (3 Punkte)

Um c nach rechts verschieben: x durch (x - c) ersetzen, nach links: durch (x + c). Um d nach oben: + d hinter den ganzen Term.

a) Die Normalparabel wird um 3 nach rechts und um 2 nach unten verschoben.

g(x) = (x - 3)² - 2 (1 P)

b) Der Graph von f(x) = x² - 4x + 1 wird um 2 nach links verschoben. Vereinfache die neue Gleichung.

x durch (x + 2) ersetzen: g(x) = (x + 2)² - 4 · (x + 2) + 1

= x² + 4x + 4 - 4x - 8 + 1 = x² - 3 (2 P)

Klausur 2 Mathe 11: Funktionen und Ableitungen (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 11 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

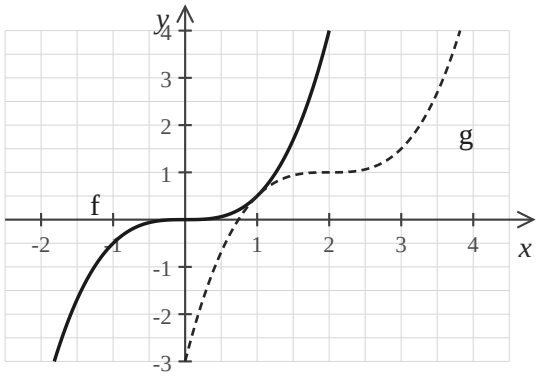
Name: _____ Datum: _____

kostenlos, mit Lösungen

10 Der gestrichelte Graph g entsteht durch Verschieben aus dem durchgezogenen Graphen f. Lies ab und gib g(x) an. (4 Punkte)

Verfolge einen besonderen Punkt: den Wendepunkt oder den Scheitelpunkt. Wie weit wandert er nach rechts oder links, nach oben oder unten?

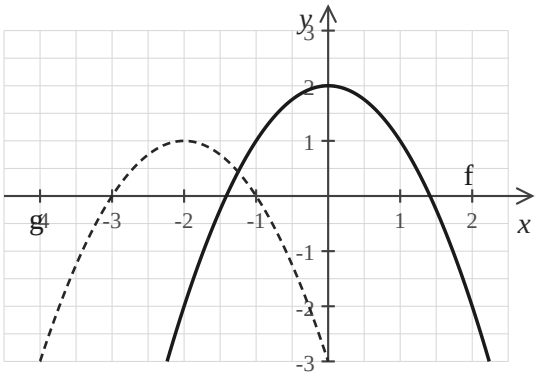
a) $f(x) = 0{,}5x^3$



Der Wendepunkt wandert von (0 | 0) nach (2 | 1): 2 nach rechts, 1 nach oben.

g(x) = 0,5 · (x - 2)³ + 1 (2 P)

b) $f(x) = -x^2 + 2$



Der Scheitel wandert von (0 | 2) nach (-2 | 1): 2 nach links, 1 nach unten.

g(x) = -(x + 2)² + 1 (2 P)

11 Gegeben ist $f(x) = x^2 - 4x + 5$. Rechne. (11 Punkte)

Tangente an der Stelle x0: t(x) = f'(x0) · (x - x0) + f(x0). Steigungswinkel: tan(α) = m. Zwei Graphen berühren sich an einer Stelle, wenn sie dort denselben Funktionswert und dieselbe Steigung haben.

a) Bestimme die Gleichung der Tangente t an den Graphen von f an der Stelle x0 = 3.

f(3) = 9 - 12 + 5 = 2, also Berührpunkt P(3 | 2)

f'(x) = 2x - 4, also f'(3) = 2

t(x) = 2 · (x - 3) + 2 = 2x - 4 (3 P)

b) Berechne den Steigungswinkel α der Tangente t.

tan(α) = 2, also α = tan⁻¹(2) ≈ 63,4° (2 P)

Klausur 2 Mathe 11: Funktionen und Ableitungen (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 11 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

Name: _____ Datum: _____

kostenlos, mit Lösungen

c) Prüfe rechnerisch, ob die Gerade g(x) = -2x + 4 den Graphen von f berührt.

Gleiche Steigung: f'(x) = -2, also 2x - 4 = -2 und x = 1

f(1) = 1 - 4 + 5 = 2 und g(1) = -2 + 4 = 2: gleicher Punkt

g berührt den Graphen von f im Punkt B(1 | 2). (3 P)

d) Zeige, dass sich die Graphen von p(x) = x³ - x und q(x) = x² - 1 an der Stelle x = 1 berühren.

p(1) = 0 und q(1) = 0: gemeinsamer Punkt (1 | 0)

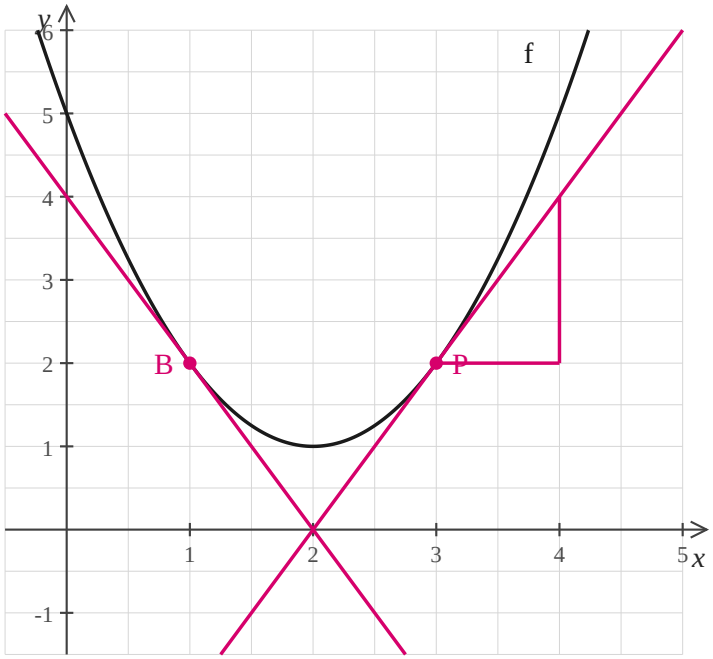
p'(x) = 3x² - 1, also p'(1) = 2. q'(x) = 2x, also q'(1) = 2: gleiche Steigung

Also berühren sich die Graphen im Punkt (1 | 0). (3 P)

12 Zeichne in den Graphen von f(x) = x² - 4x + 5 die Tangente t und die Gerade g aus der Aufgabe davor ein. (2 Punkte)

Markiere zuerst den Berührpunkt. Zeichne von dort ein Steigungsdreieck: 1 nach rechts und m nach oben (bei negativem m nach unten).

a) Tangente t an der Stelle x0 = 3 und Gerade g(x) = -2x + 4



t geht durch P(3 | 2): 1 nach rechts, 2 nach oben.

g geht durch B(1 | 2) mit der Steigung -2. t und g schneiden sich bei (2 | 0). (2 P)

Klausur 2 Mathe 11: Funktionen und Ableitungen (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 11 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

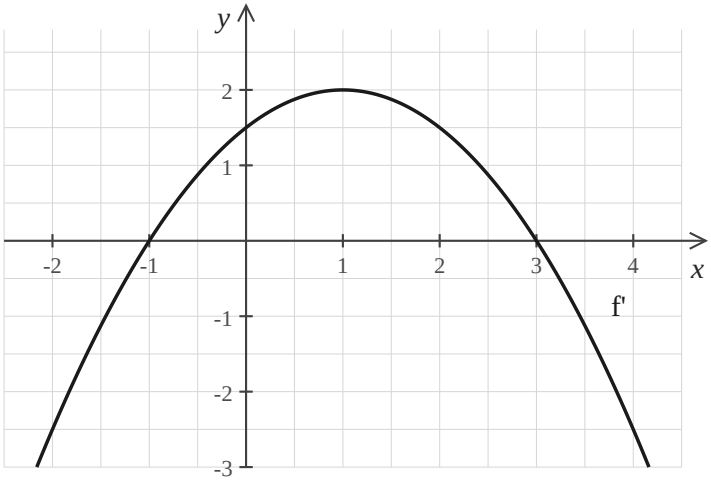
Name: _____ Datum: _____

kostenlos, mit Lösungen

13 Gezeichnet ist der Graph der Ableitung f' einer Funktion f, nicht f selbst. (1 Punkt)

Eine waagerechte Tangente von f heißt: Die Steigung ist 0.

a) An welchen Stellen hat der Graph von f eine waagerechte Tangente?



Bei x = -1 und x = 3, den Nullstellen von f'. (1 P)

14 Begründe mit dem Graphen von f' aus der Aufgabe davor. (6 Punkte)

Wo f' über der x-Achse liegt, steigt f. Achte bei den Nullstellen von f' darauf, ob das Vorzeichen wechselt.

a) In welchem Intervall steigt f? Begründe.

Für -1 < x < 3 ist f'(x) > 0, dort steigt f. Für x < -1 und x > 3 fällt f. (2 P)

b) Hat f bei x = -1 und bei x = 3 einen Hoch- oder einen Tiefpunkt? Begründe mit dem Vorzeichen von f'.

x = -1: f' wechselt von - nach +, also Tiefpunkt.

x = 3: f' wechselt von + nach -, also Hochpunkt. (2 P)

c) Wo hat f einen Wendepunkt? Begründe.

Bei x = 1: Dort hat f' seinen Hochpunkt, f steigt dort am steilsten. (2 P)

Klausur 2 Mathe 11: Funktionen und Ableitungen (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 11 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

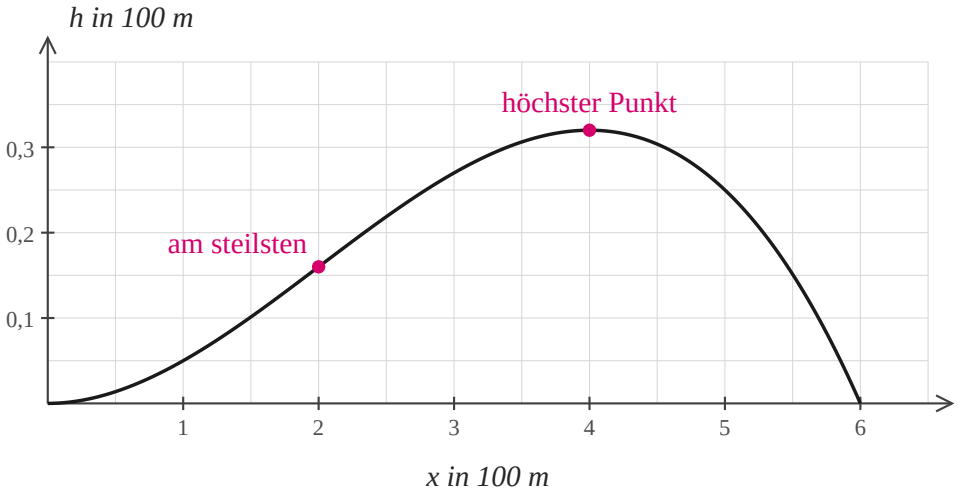
Name: _____ Datum: _____

kostenlos, mit Lösungen

15 Sachaufgabe: Mountainbike-Strecke. Arbeite in der Zeichnung. (2 Punkte)

Eine Mountainbike-Strecke führt über einen Hügel. Ihr Profil ist $h(x) = -0{,}01x^3 + 0{,}06x^2$ für $0 \le x \le 6$ (x waagerecht und h in 100 m).

a) Markiere den höchsten Punkt der Strecke und die Stelle, an der sie am steilsten bergauf geht.



Höchster Punkt bei x = 4: (4 | 0,32)

Am steilsten bergauf bei x = 2 (Wendepunkt): (2 | 0,16) (2 P)

16 Berechne und deute die Ergebnisse für die Mountainbike-Strecke. (15 Punkte)

Eine Mountainbike-Strecke führt über einen Hügel. Ihr Profil ist $h(x) = -0{,}01x^3 + 0{,}06x^2$ für $0 \le x \le 6$ (x waagerecht und h in 100 m). Steigung 0,09 heißt 9 %: auf 100 m waagerecht 9 m nach oben.

a) Berechne h(1) und h(5). Was bedeuten die Werte?

h(1) = -0,01 + 0,06 = 0,05: 100 m nach dem Start ist die Strecke 5 m hoch.

h(5) = -1,25 + 1,5 = 0,25: nach 500 m ist sie 25 m hoch. (2 P)

b) Berechne die mittlere Steigung zwischen dem Start (x = 0) und dem höchsten Punkt (x = 4).

h(4) = -0,64 + 0,96 = 0,32

(h(4) - h(0)) : (4 - 0) = 0,32 : 4 = 0,08, also im Mittel 8 % Steigung (2 P)

Klausur 2 Mathe 11: Funktionen und Ableitungen (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 11 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

Name: _____ Datum: _____

kostenlos, mit Lösungen

c) Bestimme h'(x) und berechne h'(1). Was bedeutet der Wert?

h'(x) = -0,03x² + 0,12x, also h'(1) = -0,03 + 0,12 = 0,09

100 m nach dem Start steigt die Strecke mit 9 %. (3 P)

d) Zeige rechnerisch, dass der höchste Punkt bei x = 4 liegt.

h'(x) = -0,03x · (x - 4) = 0, also x = 0 oder x = 4

Vor x = 4 ist h' positiv, danach negativ: Vorzeichenwechsel von + nach -, also Hochpunkt.

h(4) = 0,32: 400 m nach dem Start, 32 m hoch (3 P)

e) Am steilsten bergauf geht es bei x = 2. Berechne den Steigungswinkel dort.

h'(2) = -0,12 + 0,24 = 0,12

tan(α) = 0,12, also α ≈ 6,8° (2 P)

f) An welchen Stellen hat die Strecke genau 9 % Steigung?

-0,03x² + 0,12x = 0,09. Teile durch -0,03: x² - 4x + 3 = 0

pq-Formel: x = 2 ± √(4 - 3) = 2 ± 1

Bei x = 1 und x = 3, also 100 m und 300 m nach dem Start. (3 P)