Klausur 2 Mathe 11: Funktionen und Ableitungen

Mathematik · Klasse 11 · mittel

vitus-tutoring.de

Name: _____ Datum: _____

kostenlos, mit Lösungen

Arbeitszeit 135 Minuten, 105 Punkte. Teil 1 (Aufgaben 1 bis 5) ohne Hilfsmittel, Teil 2 mit Taschenrechner. Schreib jeden Rechenweg auf.

1 Bilde die erste Ableitung. Löse Klammern vorher auf. (8 Punkte)

Potenzregel: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$. Ein Faktor vor dem x bleibt stehen, eine Zahl ohne x fällt weg. Ein Produkt mit x in beiden Faktoren erst ausmultiplizieren.

a) $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 5x - 7$

b) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 4$

c) $f(x) = (x - 2)(x + 3)$

d) $f(x) = x^2 \cdot (4 - x)$

e) $f(x) = (2x - 1)^2$

2 Finde den Fehler und leite richtig ab. (6 Punkte)

Beschreibe zuerst in einem Satz, was falsch gemacht wurde. Dann rechne richtig.

a) Lena leitet $f(x) = 5x^3 - 2x + 7$ ab: $f'(x) = 15x^2 - 2x + 7$.

b) Emre leitet $f(x) = x \cdot (x^2 - 3)$ ab, indem er jeden Faktor einzeln ableitet: $f'(x) = 1 \cdot 2x = 2x$.

Klausur 2 Mathe 11: Funktionen und Ableitungen (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 11 · mittel

vitus-tutoring.de

Name: _____ Datum: _____

kostenlos, mit Lösungen

c) Duc leitet $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x$ ab: $f'(x) = 2x^5 - 1$.

3 Berechne die Nullstellen mit dem angegebenen Verfahren. (13 Punkte)

pq-Formel für $x^2 + px + q = 0$: $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$. abc-Formel für $ax^2 + bx + c = 0$: $x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}) : (2a)$. Satz vom Nullprodukt: Ein Produkt ist 0, wenn ein Faktor 0 ist.

a) $f(x) = 2x^2 - 18$ (Umstellen nach x)

b) $f(x) = x^2 - 2x - 8$ (pq-Formel)

c) $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$ (abc-Formel)

d) $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x$ (Ausklammern, Satz vom Nullprodukt)

e) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ (Substitution $z = x^2$). Gib auch alle Schnittpunkte mit den Achsen an.

Klausur 2 Mathe 11: Funktionen und Ableitungen (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 11 · mittel

vitus-tutoring.de

Name: _____ Datum: _____

kostenlos, mit Lösungen

4 Untersuche die Symmetrie und das Verhalten für $x \to \pm\infty$. (6 Punkte)

f(-x) = f(x): achsensymmetrisch zur y-Achse. f(-x) = -f(x): punktsymmetrisch zum Ursprung. Für $x \to \pm\infty$ entscheidet nur der Summand mit der höchsten Potenz.

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$. Prüfe die Symmetrie rechnerisch.

b) $g(x) = 2x^3 - x$. Prüfe die Symmetrie rechnerisch.

c) $f(x) = -2x^3 + 5x^2 + 1$. Wie verhält sich f für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$? Begründe.

5 Rechne mit $f(x) = x^3 - 3x$. (6 Punkte)

Mittlere Änderungsrate in [a; b] (Steigung der Sekante): (f(b) - f(a)) : (b - a). Lokale Änderungsrate an der Stelle x0 (Steigung der Tangente): f'(x0).

a) Berechne f(-1) und f(2).

b) Berechne die mittlere Änderungsrate von f im Intervall [0; 2].

c) Berechne die lokale Änderungsrate von f an der Stelle x = 2.

d) An welchen Stellen hat der Graph von f die Steigung 9?

Klausur 2 Mathe 11: Funktionen und Ableitungen (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 11 · mittel

vitus-tutoring.de

Name: _____ Datum: _____

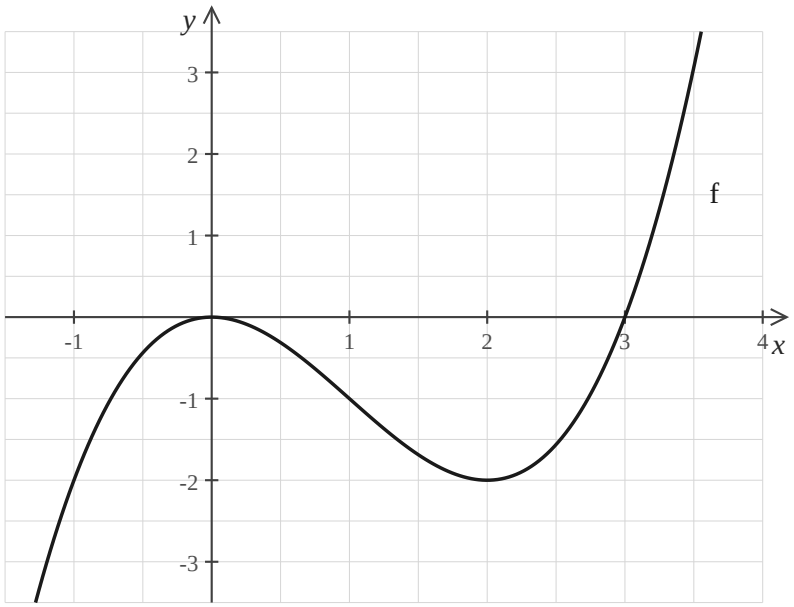
kostenlos, mit Lösungen

Teil 2: ab hier ist ein Taschenrechner erlaubt (nicht grafikfähig).

6 Gezeichnet ist der Graph von f mit $f(x) = 0{,}5x^3 - 1{,}5x^2$. Arbeite in der Zeichnung. (6 Punkte)

Am Hoch- und Tiefpunkt ist die Tangente waagerecht. Am Wendepunkt ändert der Graph seine Krümmung, dort ist er am steilsten. Hoch- und Tiefpunkte von f werden Nullstellen von f'.

a) Markiere den Hochpunkt H, den Tiefpunkt T und den Wendepunkt W. Skizziere dann den Graphen von f' in dasselbe Koordinatensystem.



7 Lies am Graphen von f aus der Aufgabe davor ab und begründe. (8 Punkte)

Gib Bereiche mit Ungleichungen oder als Intervall an, zum Beispiel $x < 2$ oder $]-\infty; 2[$.

a) In welchen Intervallen steigt f, in welchem fällt f?

Klausur 2 Mathe 11: Funktionen und Ableitungen (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 11 · mittel

vitus-tutoring.de

Name: _____ Datum: _____

kostenlos, mit Lösungen

b) Für welche x gilt f(x) > 0?

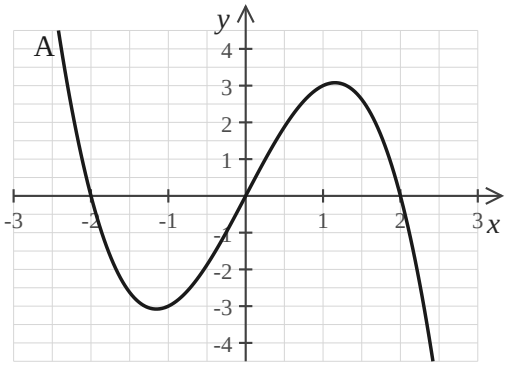
c) Begründe mit dem Graphen von f, warum f' bei x = 1 seinen kleinsten Wert hat.

d) Bestätige die Lage von H und T rechnerisch.

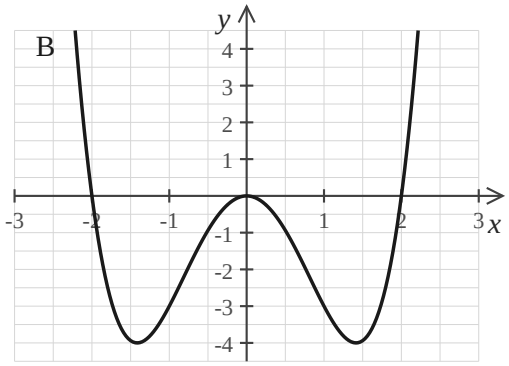
8 Ordne jedem Graphen die passende Gleichung zu und begründe kurz. (8 Punkte)

Zur Auswahl: (1) $f(x) = x^3 - 4x$; (2) $f(x) = -x^3 + 4x$; (3) $f(x) = x^4 - 4x^2$; (4) $f(x) = -x^4 + 4x^2$; (5) $f(x) = -0{,}5x^2 + 2$. Eine Gleichung bleibt übrig. Achte auf die Enden des Graphen, die Symmetrie und die Nullstellen.

a) Graph A



b) Graph B



Klausur 2 Mathe 11: Funktionen und Ableitungen (Fortsetzung)

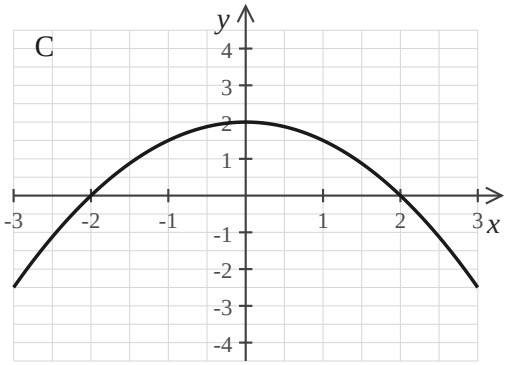
Mathematik · Klasse 11 · mittel

vitus-tutoring.de

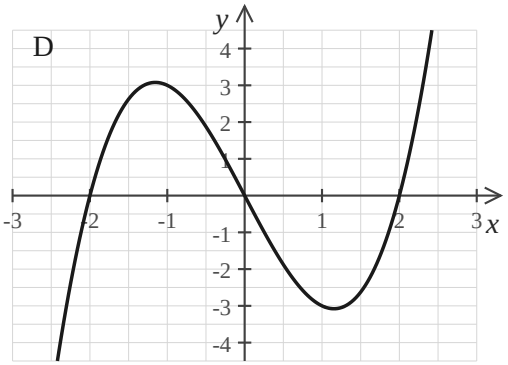
Name: _____ Datum: _____

kostenlos, mit Lösungen

c) Graph C



d) Graph D



9 Gib die Gleichung des verschobenen Graphen an. (3 Punkte)

Um c nach rechts verschieben: x durch (x - c) ersetzen, nach links: durch (x + c). Um d nach oben: + d hinter den ganzen Term.

a) Die Normalparabel wird um 3 nach rechts und um 2 nach unten verschoben.

b) Der Graph von $f(x) = x^2 - 4x + 1$ wird um 2 nach links verschoben. Vereinfache die neue Gleichung.

Klausur 2 Mathe 11: Funktionen und Ableitungen (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 11 · mittel

vitus-tutoring.de

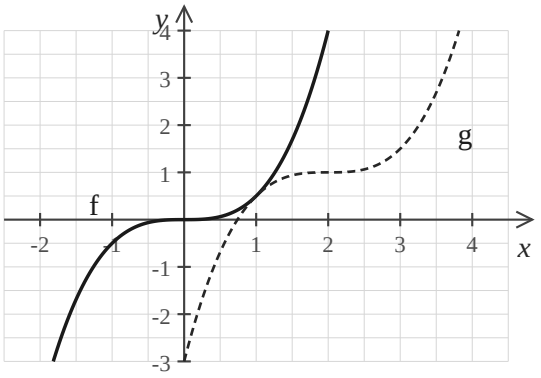
Name: _____ Datum: _____

kostenlos, mit Lösungen

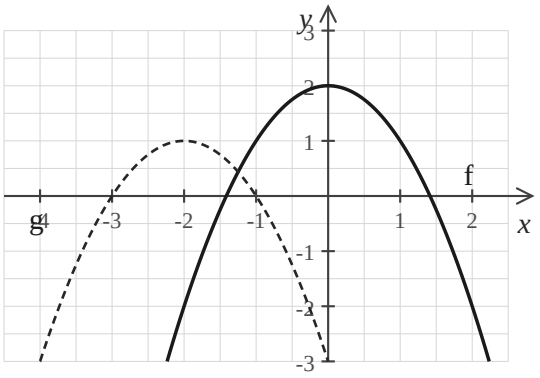
10 Der gestrichelte Graph g entsteht durch Verschieben aus dem durchgezogenen Graphen f. Lies ab und gib g(x) an. (4 Punkte)

Verfolge einen besonderen Punkt: den Wendepunkt oder den Scheitelpunkt. Wie weit wandert er nach rechts oder links, nach oben oder unten?

a) $f(x) = 0{,}5x^3$



b) $f(x) = -x^2 + 2$



11 Gegeben ist $f(x) = x^2 - 4x + 5$. Rechne. (11 Punkte)

Tangente an der Stelle x0: $t(x) = f'(x0) \cdot (x - x0) + f(x0)$. Steigungswinkel: $\tan(\alpha) = m$. Zwei Graphen berühren sich an einer Stelle, wenn sie dort denselben Funktionswert und dieselbe Steigung haben.

a) Bestimme die Gleichung der Tangente t an den Graphen von f an der Stelle x0 = 3.

b) Berechne den Steigungswinkel α der Tangente t.

Klausur 2 Mathe 11: Funktionen und Ableitungen (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 11 · mittel

vitus-tutoring.de

Name: _____ Datum: _____

kostenlos, mit Lösungen

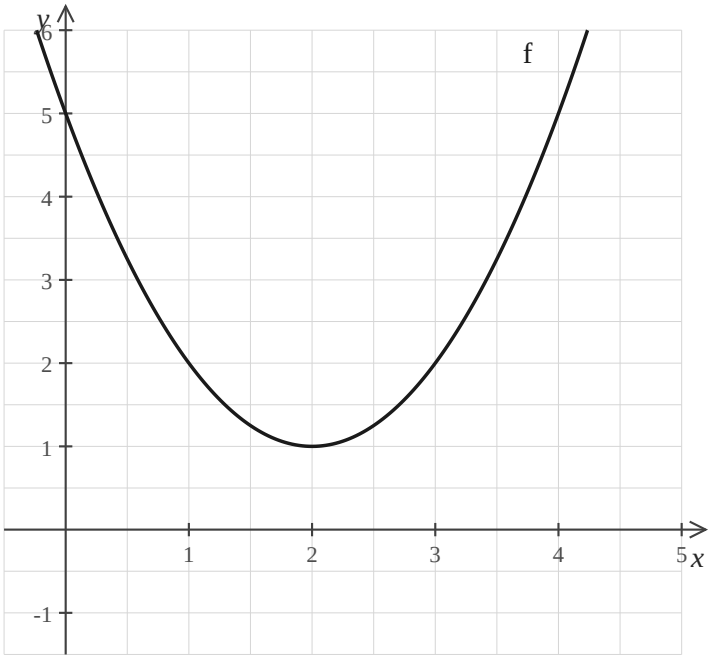
c) Prüfe rechnerisch, ob die Gerade g(x) = -2x + 4 den Graphen von f berührt.

d) Zeige, dass sich die Graphen von p(x) = x³ - x und q(x) = x² - 1 an der Stelle x = 1 berühren.

12 Zeichne in den Graphen von f(x) = x² - 4x + 5 die Tangente t und die Gerade g aus der Aufgabe davor ein. (2 Punkte)

Markiere zuerst den Berührpunkt. Zeichne von dort ein Steigungsdreieck: 1 nach rechts und m nach oben (bei negativem m nach unten).

a) Tangente t an der Stelle x0 = 3 und Gerade g(x) = -2x + 4



Klausur 2 Mathe 11: Funktionen und Ableitungen (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 11 · mittel

vitus-tutoring.de

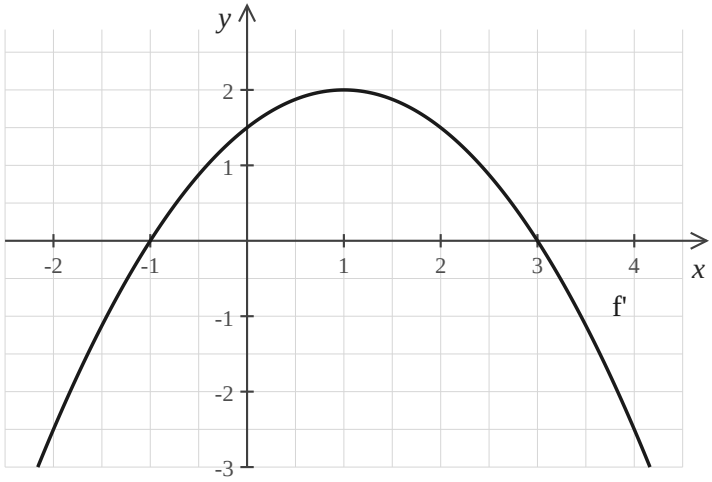
Name: _____ Datum: _____

kostenlos, mit Lösungen

13 Gezeichnet ist der Graph der Ableitung f' einer Funktion f, nicht f selbst. (1 Punkt)

Eine waagerechte Tangente von f heißt: Die Steigung ist 0.

a) An welchen Stellen hat der Graph von f eine waagerechte Tangente?



14 Begründe mit dem Graphen von f' aus der Aufgabe davor. (6 Punkte)

Wo f' über der x-Achse liegt, steigt f. Achte bei den Nullstellen von f' darauf, ob das Vorzeichen wechselt.

a) In welchem Intervall steigt f? Begründe.

b) Hat f bei x = -1 und bei x = 3 einen Hoch- oder einen Tiefpunkt? Begründe mit dem Vorzeichen von f'.

c) Wo hat f einen Wendepunkt? Begründe.

Klausur 2 Mathe 11: Funktionen und Ableitungen (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 11 · mittel

vitus-tutoring.de

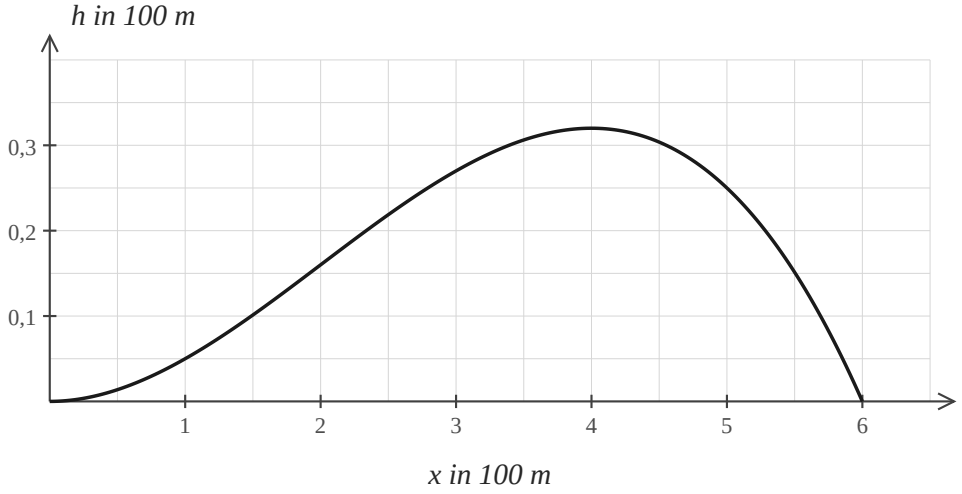
Name: _____ Datum: _____

kostenlos, mit Lösungen

15 Sachaufgabe: Mountainbike-Strecke. Arbeite in der Zeichnung. (2 Punkte)

Eine Mountainbike-Strecke führt über einen Hügel. Ihr Profil ist $h(x) = -0{,}01x^3 + 0{,}06x^2$ für $0 \le x \le 6$ (x waagerecht und h in 100 m).

a) Markiere den höchsten Punkt der Strecke und die Stelle, an der sie am steilsten bergauf geht.



16 Berechne und deute die Ergebnisse für die Mountainbike-Strecke. (15 Punkte)

Eine Mountainbike-Strecke führt über einen Hügel. Ihr Profil ist $h(x) = -0{,}01x^3 + 0{,}06x^2$ für $0 \le x \le 6$ (x waagerecht und h in 100 m). Steigung 0,09 heißt 9 %: auf 100 m waagerecht 9 m nach oben.

a) Berechne h(1) und h(5). Was bedeuten die Werte?

b) Berechne die mittlere Steigung zwischen dem Start (x = 0) und dem höchsten Punkt (x = 4).

Klausur 2 Mathe 11: Funktionen und Ableitungen (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 11 · mittel

vitus-tutoring.de

Name: _____ Datum: _____

kostenlos, mit Lösungen

c) Bestimme h'(x) und berechne h'(1). Was bedeutet der Wert?

d) Zeige rechnerisch, dass der höchste Punkt bei x = 4 liegt.

e) Am steilsten bergauf geht es bei x = 2. Berechne den Steigungswinkel dort.

f) An welchen Stellen hat die Strecke genau 9 % Steigung?