Grenzwerte und Stetigkeit

Mathematik · Klasse 11 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

kostenlos, mit Lösungen

Name: _____ Datum: _____

1 Bestimme das Verhalten für $x \to \pm\infty$ und die waagerechte Asymptote.

Vergleiche die Grade. Gleicher Grad: Grenzwert = Zahl vor der höchsten Potenz oben geteilt durch die unten. Nennergrad größer: Grenzwert 0. Zählergrad größer: kein Grenzwert, f(x) geht gegen +∞ oder -∞. Wohin, zeigt der Quotient der höchsten Potenzen: $-10x^3 / (5x^2) = -2x$.

a) $f(x) = (-4x^2 - 3x - 1) / (4x^2 - 2)$

Zählergrad = Nennergrad = 2: $f(x) \to -\frac{4}{4} = -1$ für $x \to \pm\infty$

waagerechte Asymptote $y = -1$

b) $f(x) = (7x - 5) / (x^2 - 2x + 9)$

Nennergrad 2 > Zählergrad 1: $f(x) \to 0$ für $x \to \pm\infty$

waagerechte Asymptote $y = 0$, das ist die x-Achse

c) $f(x) = (-4x^3 - 5) / (4x^2 - 4x + 9)$

Zählergrad 3 > Nennergrad 2: f(x) verhält sich wie -x, also $x \to +\infty$: $f(x) \to -\infty$, $x \to -\infty$: $f(x) \to +\infty$

kein Grenzwert, keine waagerechte Asymptote

2 Berechne den Grenzwert an der Definitionslücke.

Einsetzen gibt $\frac{0}{0}$? Dann Zähler zerlegen, kürzen, erst jetzt einsetzen: $(x^2 - 100) / (x - 10) = x + 10 \to 20$.

a) $f(x) = (x^2 - 3x + 2) / (x - 2)$, $x \to 2$

Einsetzen ergibt $\frac{0}{0}$. Zähler zerlegen: $(x - 2)(x - 1)$, kürzen: $f(x) = x - 1$ für $x \neq 2$

Grenzwert $2 - 1 = 1$

b) $f(x) = (x^2 - x - 12) / (x + 3)$, $x \to -3$

Einsetzen ergibt $\frac{0}{0}$. Zähler zerlegen: $(x + 3)(x - 4)$, kürzen: $f(x) = x - 4$ für $x \neq -3$

Grenzwert $-3 - 4 = -7$

c) $f(x) = (x^2 + 5x + 6) / (x + 2)$, $x \to -2$

Einsetzen ergibt $\frac{0}{0}$. Zähler zerlegen: $(x + 2)(x + 3)$, kürzen: $f(x) = x + 3$ für $x \neq -2$

Grenzwert $-2 + 3 = 1$

Grenzwerte und Stetigkeit (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 11 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

kostenlos, mit Lösungen

Name: _____ Datum: _____

3 Ist f stetig? Setze die Nahtstelle in beide Terme ein. Gleiches Ergebnis heißt stetig.

a) $f(x) = 3x + 3$ für $x < 3$
$f(x) = 5x - 4$ für $x \geq 3$

linksseitiger Grenzwert: $3 \cdot 3 + 3 = 9 + 3 = 12$

rechtsseitiger Grenzwert: $5 \cdot 3 - 4 = 15 - 4 = 11$, $f(3) = 11$

12 und 11 sind verschieden: Sprungstelle, f ist bei 3 nicht stetig.

b) $f(x) = 4x + 3$ für $x < 1$
$f(x) = -x + 8$ für $x \geq 1$

linksseitiger Grenzwert: $4 \cdot 1 + 3 = 4 + 3 = 7$

rechtsseitiger Grenzwert: $-1 + 8 = 7$, $f(1) = 7$

Alle drei sind gleich: f ist bei 1 stetig.

c) $f(x) = x^2 - 4$ für $x < 2$
$f(x) = -x + 2$ für $x \geq 2$

linksseitiger Grenzwert: $2^2 - 4 = 4 - 4 = 0$

rechtsseitiger Grenzwert: $-2 + 2 = 0$, $f(2) = 0$

Alle drei sind gleich: f ist bei 2 stetig.

4 Berechne f'(x0) als Grenzwert des Differenzenquotienten.

Setze x0 + h ein, kürze h und lass dann h gegen 0 gehen: $((5 + h)^2 - 25) / h = 10 + h \to 10$.

a) $f(x) = 2x^2$, $x0 = 3$

$f(3 + h) = 2 \cdot (3 + h)^2 = 18 + 12h + 2h^2$

$(f(3 + h) - f(3)) / h = (12h + 2h^2) / h = 12 + 2h$

$h \to 0$: $f'(3) = 12$

b) $f(x) = x^2$, $x0 = -1$

$f(-1 + h) = (-1 + h)^2 = 1 - 2h + h^2$

$(f(-1 + h) - f(-1)) / h = (-2h + h^2) / h = -2 + h$

$h \to 0$: $f'(-1) = -2$