Extremwertaufgaben

Mathematik · Klasse 11 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

kostenlos, mit Lösungen

Name: _____ Datum: _____

1 Bestimme die Seiten des größten Beets an der Mauer.

Das Beet ist ein Rechteck an der Mauer, der Zaun läuft nur um die drei anderen Seiten: 2a + b = Zaunlänge, a steht senkrecht zur Mauer. Drück b durch a aus, setz es in A = a · b ein, leite ab und setze A'(a) = 0. A''(a) < 0 heißt Maximum.

a) Zaunlänge 20 m

Nebenbedingung: $2a + b = 20 \rightarrow b = 20 - 2a$

$A(a) = a \cdot (20 - 2a) = 20a - 2a^2$, $0 < a < 10$

$A'(a) = 20 - 4a = 0 \rightarrow a = 5$

$A''(a) = -4 < 0$: Maximum

$a = 5$ m, $b = 10$ m, $A = 50$ m²

b) Zaunlänge 44 m

Nebenbedingung: $2a + b = 44 \rightarrow b = 44 - 2a$

$A(a) = a \cdot (44 - 2a) = 44a - 2a^2$, $0 < a < 22$

$A'(a) = 44 - 4a = 0 \rightarrow a = 11$

$A''(a) = -4 < 0$: Maximum

$a = 11$ m, $b = 22$ m, $A = 242$ m²

c) Zaunlänge 36 m

Nebenbedingung: $2a + b = 36 \rightarrow b = 36 - 2a$

$A(a) = a \cdot (36 - 2a) = 36a - 2a^2$, $0 < a < 18$

$A'(a) = 36 - 4a = 0 \rightarrow a = 9$

$A''(a) = -4 < 0$: Maximum

$a = 9$ m, $b = 18$ m, $A = 162$ m²

Extremwertaufgaben (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 11 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

kostenlos, mit Lösungen

Name: _____ Datum: _____

2 Bestimme x so, dass die Schachtel das größte Volumen hat.

Aus einem quadratischen Blech schneidest du an den Ecken gleich große Quadrate mit der Seite x aus und faltest die Ränder zu einer offenen Schachtel hoch. Stell V(x) = Grundfläche · Höhe auf, leite ab und setze V'(x) = 0. Prüfe am Ende, ob dein x zur Schachtel passt.

a) Blech mit 24 cm Seitenlänge

Boden: Quadrat mit der Seite 24 - 2x, Höhe x, 0 < x < 12

$V(x) = x \cdot (24 - 2x)^2 = 4x^3 - 96x^2 + 576x$

$V'(x) = 12x^2 - 192x + 576 = 0 \mid : 12 \rightarrow x^2 - 16x + 48 = 0$

x = 4 oder x = 12; x = 12 ist der Rand (kein Boden, V = 0)

$V''(x) = 24x - 192$, $V''(4) = -96 < 0$: Maximum

$x = 4$ cm, $V = 4 \cdot 16^2 = 1024$ cm³

b) Blech mit 18 cm Seitenlänge

Boden: Quadrat mit der Seite 18 - 2x, Höhe x, 0 < x < 9

$V(x) = x \cdot (18 - 2x)^2 = 4x^3 - 72x^2 + 324x$

$V'(x) = 12x^2 - 144x + 324 = 0 \mid : 12 \rightarrow x^2 - 12x + 27 = 0$

x = 3 oder x = 9; x = 9 ist der Rand (kein Boden, V = 0)

$V''(x) = 24x - 144$, $V''(3) = -72 < 0$: Maximum

$x = 3$ cm, $V = 3 \cdot 12^2 = 432$ cm³

3 Bestimme das größte Rechteck unter der Parabel.

Das Rechteck liegt zwischen Graph und x-Achse, die oberen Ecken auf dem Graphen. Die rechte obere Ecke ist P(x | f(x)), also ist das Rechteck 2x breit und f(x) hoch. Stell A(x) auf, leite ab und setze A'(x) = 0.

a) $f(x) = 48 - x^2$

Breite 2x, Höhe $48 - x^2$, $0 < x < \sqrt{48}$

$A(x) = 2x \cdot (48 - x^2) = 96x - 2x^3$

$A'(x) = 96 - 6x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = 4$ (-4 fällt weg)

$A''(x) = -12x$, $A''(4) = -48 < 0$: Maximum

Breite 8, Höhe 32, A = 256 FE (Flächeneinheiten)

Extremwertaufgaben (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 11 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

kostenlos, mit Lösungen

Name: _____ Datum: _____

b) $f(x) = 12 - x^2$

Breite 2x, Höhe 12 - x², 0 < x < √12

A(x) = 2x · (12 - x²) = 24x - 2x³

A'(x) = 24 - 6x² = 0 → x² = 4 → x = 2 (-2 fällt weg)

A''(x) = -12x, A''(2) = -24 < 0: Maximum

Breite 4, Höhe 8, A = 32 FE (Flächeneinheiten)

4 Zerlege die Zahl in zwei Summanden, deren Quadrate zusammen möglichst klein sind.

Die Zahl s zerlegst du in x und s - x. Die Zielfunktion ist Q(x) = x² + (s - x)². Multipliziere aus, leite ab und setze Q'(x) = 0. Q''(x) > 0 heißt Minimum.

a) Zahl 12

Summanden x und 12 - x: Q(x) = x² + (12 - x)² = 2x² - 24x + 144

Q'(x) = 4x - 24 = 0 → x = 6

Q''(x) = 4 > 0: Minimum

Beide Summanden sind 6, Q = 6² + 6² = 72

b) Zahl 24

Summanden x und 24 - x: Q(x) = x² + (24 - x)² = 2x² - 48x + 576

Q'(x) = 4x - 48 = 0 → x = 12

Q''(x) = 4 > 0: Minimum

Beide Summanden sind 12, Q = 12² + 12² = 288

c) Zahl 14

Summanden x und 14 - x: Q(x) = x² + (14 - x)² = 2x² - 28x + 196

Q'(x) = 4x - 28 = 0 → x = 7

Q''(x) = 4 > 0: Minimum

Beide Summanden sind 7, Q = 7² + 7² = 98