Exponentialfunktion und Logarithmus

Mathematik · Klasse 11 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

kostenlos, mit Lösungen

Name: _____ Datum: _____

1 Berechne den Logarithmus ohne Taschenrechner.

Der Logarithmus fragt nach der Hochzahl, ln ist der Logarithmus zur Basis e. Negative Hochzahlen geben Kehrwerte: $10^{-2} = 0{,}01$, also log10(0,01) = -2. Die Hochzahl $\frac{1}{2}$ heißt Wurzel: $16^{1/2} = \sqrt{16} = 4$, also log16(4) = $\frac{1}{2}$.

a) $\log_5(\frac{1}{5})$ = *-1, weil $5^{-1} = \frac{1}{5}$*

b) $\ln(e^4)$ = *4, weil ln die Umkehrung von e^x ist*

c) $\log_4(2)$ = *$\frac{1}{2}$, weil $4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$*

d) $\log_{10}(0{,}001)$ = *-3, weil $10^{-3} = 0{,}001$*

e) $\log_3(\frac{1}{9})$ = *-2, weil $3^{-2} = \frac{1}{9}$*

f) $\ln(1)$ = *0, weil $e^0 = 1$*

2 Löse die Gleichung.

Teile durch den Faktor vor der Potenz, dann nimm ln: Aus $b^x = c$ wird $x = \ln(c) / \ln(b)$.

a) $7 \cdot e^{3x} = 70$

durch 7 teilen: $e^{3x} = 10$

ln nehmen: $3x = \ln(10) \rightarrow x = \ln(10) / 3 \approx 0{,}77$

b) $2 \cdot 5^x = 16$

durch 2 teilen: $5^x = 8$

ln nehmen: $x = \ln(8) / \ln(5) \approx 1{,}29$

3 Berechne, nach wie vielen Tagen nur noch so viel übrig ist.

Jede Halbwertszeit halbiert den Rest: 50 %, 25 %, 12,5 % … Liegt der Rest nicht in dieser Reihe, löse $0{,}5^{t/T}$ = Rest mit dem Logarithmus.

a) Halbwertszeit 4 Tage, noch 12,5 % übrig

12,5 % = 100 % · $0{,}5^3$, also 3 Halbwertszeiten

t = 3 · 4 = 12 Tage

b) Halbwertszeit 30 Tage, noch 10 % übrig

$0{,}5^{t/30} = 0{,}1 \rightarrow \frac{t}{30} = \ln(0{,}1) / \ln(0{,}5) \approx 3{,}32$

$t \approx 3{,}32 \cdot 30 \approx 99{,}7$ Tage

4 Bestimme a und k in $f(x) = a \cdot e^{k \cdot x}$.

$f(0) = a \cdot e^0 = a$, also ist a der Startwert. Setze dann den zweiten Wert ein, teile durch a und nimm ln.

a) f(0) = 7, f(2) = 63

$a = f(0) = 7$, $7 \cdot e^{2k} = 63$, $e^{2k} = 9$

$k = \ln(9) / 2 = \ln(3) \approx 1{,}10$, $f(x) = 7 \cdot e^{1{,}10x}$

b) f(0) = 2, f(2) = 50

$a = f(0) = 2$, $2 \cdot e^{2k} = 50$, $e^{2k} = 25$

$k = \ln(25) / 2 = \ln(5) \approx 1{,}61$, $f(x) = 2 \cdot e^{1{,}61x}$

5 Bestimme die Tangente an der Stelle x = 0.

Die Tangente bei $x = 0$ ist $y = f'(0) \cdot x + f(0)$. Denk an $e^0 = 1$.

a) $f(x) = 4 \cdot e^{-2x} - 1$

$f(0) = 4 \cdot e^0 - 1 = 3$, $f'(x) = -8 \cdot e^{-2x}$, $f'(0) = -8$

$y = -8x + 3$

b) $f(x) = 2 \cdot e^{2x} - 2$

$f(0) = 2 \cdot e^0 - 2 = 0$, $f'(x) = 4 \cdot e^{2x}$, $f'(0) = 4$

$y = 4x$

c) $f(x) = 2 \cdot e^{-x}$

$f(0) = 2 \cdot e^0 = 2$, $f'(x) = -2 \cdot e^{-x}$, $f'(0) = -2$

$y = -2x + 2$