Ableitungen - vermischte Aufgaben

Mathematik · Klasse 11 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

kostenlos, mit Lösungen

Name: _____ Datum: _____

1 Multipliziere zuerst aus, dann leite ab.

Ableiten kannst du nur Summen von Potenzen. Löse Klammern und Quadrate deshalb zuerst auf: $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$, also $f'(x) = 2x - 6$. Den Faktor vor der Klammer multiplizierst du in jeden Summanden.

a) $f(x) = x(x^2 - \frac{1}{2}x + 2)$

$f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x$

$f'(x) = 3x^2 - x + 2$

b) $f(x) = \frac{1}{4} \cdot (x^2 - 4)^2$

$f(x) = \frac{1}{4} \cdot (x^4 - 8x^2 + 16) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 4$

$f'(x) = x^3 - 4x$

c) $f(x) = -(x - 3)^2(x + 3)$

$f(x) = -(x^2 - 6x + 9)(x + 3) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 27$

$f'(x) = -3x^2 + 6x + 9$

d) $f(x) = (3x + 2)(x^2 + 1)$

$f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 3x + 2$

$f'(x) = 9x^2 + 4x + 3$

2 Leite nach x ab. Buchstaben wie a, k oder t sind feste Zahlen.

Ein Parameter wird behandelt wie eine Zahl: $(tx^3)' = 3tx^2$, genau wie $(5x^3)' = 15x^2$. Ein Summand ohne x, etwa t^2 oder c, fällt weg.

a) $f_k(x) = kx^2 - 6kx + k^3$ *$f_k'(x) = 2kx - 6k$ (k^3 fällt weg)*

b) $f_t(x) = \frac{t}{2}x^4 - 2tx^3 + t^2$ *$f_t'(x) = 4 \cdot \frac{t}{2}x^3 - 3 \cdot 2t\,x^2 = 2tx^3 - 6tx^2$ (t^2 fällt weg)*

c) $f_a(x) = ax^3 - a^2x + 1$ *$f_a'(x) = 3ax^2 - a^2$ (a^2 ist die Zahl vor dem x)*

d) $f(x) = ax^4 + bx^3 + c$ *$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2$ (c fällt weg)*

Ableitungen - vermischte Aufgaben (Fortsetzung)

Mathematik · Klasse 11 · mittel · Lösungen

vitus-tutoring.de

kostenlos, mit Lösungen

Name: _____ Datum: _____

3 Leite ab. Schreib $\frac{1}{x}$ vorher als x^{-1}.

$\frac{1}{x} = x^{-1}$. Mit der Potenzregel: $(x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = -1 / x^2$. Genauso $3 / x^2 = 3x^{-2}$, abgeleitet $-6x^{-3} = -6 / x^3$.

a) $f(x) = -2x + \frac{8}{x}$ *$f(x) = -2x + 8x^{-1}$, $f'(x) = -2 - 8x^{-2} = -2 - 8 / x^2$*

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + \frac{1}{x}$ *$f(x) = x^3 - 3x^2 + x^{-1}$, $f'(x) = 3x^2 - 6x - x^{-2} = 3x^2 - 6x - 1 / x^2$*

c) $f(x) = 2 / x^2 - 4x$ *$f(x) = 2x^{-2} - 4x$, $f'(x) = -4x^{-3} - 4 = -4 / x^3 - 4$*

4 Bestimme f'(x) und f''(x).

f'' ist die Ableitung von f'. $(e^x)' = e^x$, $(\sin(x))' = \cos(x)$, $(\cos(x))' = -\sin(x)$. Zahlen wie 3e fallen weg. Tipp: $e^x \cdot e^{-x} = e^0 = 1$.

a) $f(x) = e^x(e^{-x} - 5)$

$f(x) = e^x \cdot e^{-x} - 5e^x = 1 - 5e^x$

$f'(x) = -5e^x$, $f''(x) = -5e^x$

b) $f(x) = 2\cos(x) + 6\sin(x)$ *$f'(x) = -2\sin(x) + 6\cos(x)$, $f''(x) = -2\cos(x) - 6\sin(x)$*

c) $f(x) = 3x - 8\sin(x)$ *$f'(x) = 3 - 8\cos(x)$, $f''(x) = 8\sin(x)$*

d) $f(x) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3e$

$f'(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 3x$, die 3e fällt weg

$f''(x) = 2x^2 - 2x - 3$

5 Berechne die Steigung des Graphen an der Stelle x0.

Erst ableiten, dann x0 in f'(x) einsetzen. Merke: $\cos(\pi) = -1$, $\sin(\pi) = 0$. Negative Zahlen kommen in Klammern: $(-2)^2 = 4$.

a) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$, x0 = 1

$f'(x) = 2x^2 - x - 2$

$f'(1) = 2 \cdot 1^2 - 1 - 2 = 2 - 1 - 2 = -1$

b) $f(x) = 2\sin(x) - \cos(x)$, $x0 = \pi$

$f'(x) = 2\cos(x) + \sin(x)$

$f'(\pi) = 2 \cdot \cos(\pi) + 1 \cdot \sin(\pi) = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = -2$

c) $f(x) = \frac{4}{x} + x^2$, $x0 = -2$

$f'(x) = -4 / x^2 + 2x$

$f'(-2) = -4 / (-2)^2 + 2 \cdot (-2) = -1 - 4 = -5$

6 Berechne Geschwindigkeit und Beschleunigung.

Die Geschwindigkeit ist die Ableitung des Weges: $v(t) = s'(t)$. Die Beschleunigung ist die Ableitung der Geschwindigkeit: $a(t) = v'(t) = s''(t)$. Einheiten: v in m/s, a in m/s².

a) Ein Körper bewegt sich nach dem Weg-Zeit-Gesetz $s(t) = 4t^2 + 4t + 5$ (s in m, t in s). Bestimme v(t) und a(t). Wie schnell ist er nach 3 s?

$v(t) = s'(t) = 8t + 4$

$a(t) = v'(t) = 8$: Er wird jede Sekunde um 8 m/s schneller.

$v(3) = 8 \cdot 3 + 4 = 28$: Nach 3 s ist er 28 m/s schnell.

b) Ein Körper bewegt sich nach dem Weg-Zeit-Gesetz $s(t) = 4t^2 + 2t$ (s in m, t in s). Bestimme v(t) und a(t). Wie schnell ist er nach 5 s?

$v(t) = s'(t) = 8t + 2$

$a(t) = v'(t) = 8$: Er wird jede Sekunde um 8 m/s schneller.

$v(5) = 8 \cdot 5 + 2 = 42$: Nach 5 s ist er 42 m/s schnell.